





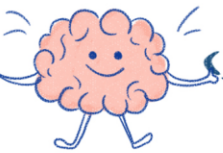
📖 **منطق ریاضی:** در منطق ریاضی به کمک روابط و قوانین روش‌های درست و منطقی استدلال کردن در ریاضی رو به ما آموزش میدهد. اگر ریاضی یک زبان باشه، منطق دستور زبانشه.

📖 **تعریف گزاره:** جمله‌ای است خبری که فقط میتونه (یا الان یا در آینده) درست یا غلط باشه.

باید فعل داشته باشه

عدد ۵ عددی کوچیکه است.





👉 **نکته:** در این شرایط یک جمله گزاره نیست:

جمله	گزاره بودن یا نبودن؟! دلیل
امروز جمعه است.	هست بار نیست
هفته‌ی بعد سه‌شنبه باران می‌بارد.	هست بعد
۲۳ مهر امسال آفتاب از غرب طلوع می‌کند.	هست بار نیست
$2+1$ دو به علاوه‌ی یک	نیست جمله نیست
عدد ۴ خیلی کوچک است.	نیست چون قابلیت اِزِ مِقدَّارِی (صَدقِ مَلَنب)
a عددی گویا است.	هست بعد
آیا فردا امتحان داریم؟	پرسشی
درس بخوان.	امری
عجب امتحان آسونی بود!	عاجفی اصصا بس

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

عدد $\sqrt{2}$ گویا است.

هست نادرست

Q. 10

گند

Q

$$B' = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x} = 0,25$$

~~$\frac{1}{\mu} = 0,17777 \dots$~~

$$\bar{\lambda} = 1,1 \text{ K} \dots$$

(۲) اردیال های نه صد و نه

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots$



🧠 **تمرین:** درستی یا نادرستی موارد زیر را طبق تعریف گزاره مشخص کنید.

الف) بعضی از جملات پرسشی گزاره هستند.

ب) اگر یک جمله خبری قابل ارزش گذاری نباشد گزاره نیست.





🧠 **تمرین:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

ب) هر مربعی یک مستطیل است.

پ) حاصل عبارت $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ عددی طبیعی است.

ت) اگر n عددی طبیعی باشد، $3n + 1$ همواره عددی فرد است.

ث) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° می‌باشد.

ج) عدد ۹۱ عددی اول است.





📖 **جبر گزاره:** به سری قرارداد و نماد که گزاره‌ها رو نشون بدیم و ارزش‌گذاری کنیم.

(۱) **نمایش گزاره:** حروف کوچک انگلیسی، معمولاً p یا q یا r یا ...

(۲) **ارزش هر گزاره:** درست T و نادرست F (میشه هم فارسی نشون داد: د یا ن)

(۳) **جدول ارزش‌گذاری:** در ساده‌ترین حالت ممکن (یک گزاره) به شکل روبرو:

p
T
F





۴) **نقیض یک گزاره:** **نقیض** p را با $\sim p$ نشون میدیم که ارزشش دقیقاً مخالف p هست.

⚠ **تذکر:** هر گزاره‌ی نادرستی، نقیضِ یک گزاره‌ی درست نیست!





۴-۱) نقیض کردن به صورت ظاهری: ۱- نفی کردن فعل جمله ۲- اضافه کردن «چنین نیست که»
به ابتدای جمله

مثال: 





۴-۲) نقیض کردن به صورت مفهومی:

۱- مثبت/منفی ~ نامثبت/نامنفی

۲- عدد صحیح زوج ~ عدد صحیح فرد

۳- بزرگتر/کوچکتر ~ نابزرگتر/ناکوچکتر

مثال: 





۴-۳) نقیض کردن با استفاده از نماد ریاضی:

عملکرد ریاضی	تساوی	عضو مجموعه	زیر مجموعه	هم‌ارزی	نامساوی	نامساوی
نماد	=	$\in$	$\subset$	$\equiv$	$>$	$<$
نماد نقیض	$\neq$	$\notin$	$\not\subset$	$\not\equiv$	$\leq$ یا $\geq$	$\leq$ یا $\geq$

مثال: 



🧠 **تمرین:** نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

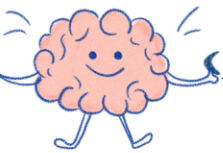
(الف) ۳۰٪ از ۱۸ کوچکتر است. ← نقیض

(ب) تهران پایتخت ایران است. ← نقیض

(پ) عدد طبیعی m زوج است. ← نقیض

(ت) b عددی منفی است. ← نقیض





۵) جدول ارزش‌گذاری چند گزاره:

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

♦ تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری 2^n

♦ تعداد ردیف‌ها با ارزش یکسان =

♦ تعداد ردیف‌ها که همه‌ی گزاره‌ها T یا F هستند =

♦ تعداد ردیف‌هایی که در آنها حداقل یک گزاره با ارزش متفاوت نسبت به سایرین هست =

♦ تعداد خانه‌های جدول =

♦ تعداد خانه‌ها با ارزش T یا F در جدول =





🧠 **تمرین:** جدول ارزش‌گذاری یک گزاره مرکب تشکیل شده از ۴ گزاره‌ی ساده چند حالت ارزش‌گذاری دارد؟

🧠 **تمرین:** تعداد ردیف‌های مربوط به جدول ارزش‌گذاری ۷ گزاره‌ای چند برابر ۵ گزاره‌ای است؟

🧠 **تمرین:** اگر دو گزاره به یک جدول ارزش‌گذاری شامل ۳ گزاره اضافه شود، تعداد حالت‌های ارزش‌گذاری چند برابر می‌شود؟





۶) **هم‌ارزی گزاره‌ها:** وقتی دو گزاره p و q هم‌ارز هستند یعنی ارزش هر دو یکسانه، هر دو درست یا هر دو غلطن: $p \equiv q$

✎ **مثال:** دو گزاره‌ی « ۲ عددی فرد است. » و « آخرین روز هفته شنبه است. » هم‌ارز هستند؛ هر دو هم غلطن!

👉 **نکته:** اگر دو گزاره هم‌ارز باشند، نقیض‌هاشون هم‌ارز هستند: $p \equiv q \Rightarrow \sim p \equiv \sim q$

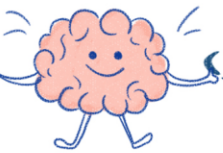
👉 **نکته:** نقیضِ نقیضِ یک گزاره برابر با خود گزاره میشه: $\sim(\sim p) \equiv p$





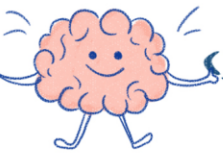
ترکیب گزاره‌ها: در علم منطق ریاضی میتوان با چهار رابط «و»، «یا»، «اگر آنگاه»، «اگر و تنها اگر» می‌توانیم گزاره‌های مرکب بسازیم. ارزش گزاره‌های مرکب هم بالاخره یا درسته یا نادرست که با توجه به گزاره‌های ساده تشکیل دهنده و نوع رابط بینشون میشه ارزششون رو پیدا کرد:





p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T





▼ ۱) ترکیب عطفی: اگر دو گزاره رو با «و» ترکیب کنیم بهش ترکیب عطفی



p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

می‌گیریم و اونو به صورت $p \wedge q$ نشون می‌دیم:

♦ زمانی ارزش ترکیب عطفی درسته که هر دو گزاره درست باشن:

♦ برای گزاره عطفی یادمون باشه:

$$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$$

$$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$$





🧠 **تمرین:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ۳۶ مربع کامل است $\frac{۷}{۳}$ و عددی گویا.

ب) $۵^۲$ عددی فرد است و $x^۲$ همواره عددی نامنفی است.

پ) $(-۳ \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$

ت) $[x(x-۲) = x^۲ - ۲x] \wedge [(\sqrt{۳}-۲)(\sqrt{۳}+۲) \geq ۱]$





تمرین: در جای خالی یک گزاره بنویسید که ارزش گزاره‌های مرکب زیر طبق جدول باشد:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	 و ۳ عدد اول است.		*
۲	پایتخت ایران تهران است و	*	





▼ ۲) ترکیب فصلی: اگر دو گزاره رو با «یا» ترکیب کنیم بهش ترکیب فصلی



p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

می‌گیریم و اونو با $p \vee q$ نشون می‌دیم:

♦ زمانی ارزش ترکیب فصلی نادرسته که هر دو گزاره نادرست باشن:

♦ برای گزاره فصلی یادمون باشه:

$$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$$

$$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$$





🧠 **تمرین:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

ب) ۵ عددی اول است یا $(-5^2) -$ عددی منفی است.

پ) ۹۰ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(2^{-4}) = 16]$





🧠 **تمرین:** در جای خالی یک گزاره بنویسید که ارزش گزاره‌های مرکب زیر طبق جدول باشد:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	 یا ۱۵ مضرب ۳ است.	*	
۲	شهریور ماه ۳۰ روز دارد یا		*





▼ (۳) **ترکیب شرطی دو گزاره:** اگر دو گزاره به صورت « p آنگاه q » بیان بشه، می‌گیم ترکیب شرطی اتفاق افتاده است و به صورت $p \Rightarrow q$ نشان می‌دیم. اسم p مقدم و اسم q تالی!

♦ روش‌های خواندن ترکیب شرطی: ۱- p نتیجه می‌دهد q را ۲- p شرط کافی است برای q ۳- q شرط لازم است برای p



p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

فقط یک حالت ارزش غلط:

وقتی که مقدم درست و تالی غلط باشه.

صحت تالی:

تو ترکیب شرطی اگر تالی درست باشه دیگه مهم نیست مقدم چی باشه ارزش کل درسته.
*اگر پنجشنبه این هفته باران بیاید، روز بعد از پنجشنبه جمعه است.

انتفای مقدم:

توی ترکیب شرطی اگر مقدم غلط باشه دیگه مهم نیست تالی چی باشه ارزش کل درسته.





🧠 **تمرین:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر ۹ زوج باشد آنگاه π گویا است.

ب) زوج بودن ۵۸ نتیجه می‌دهد گویا بودن $\frac{1}{e}$ را.

پ) اگر $\sqrt{3} > 1 + \sqrt{2}$ آنگاه $\{(4,5) \text{ و } (5,4)\} = f$ تابع نیست.

ت) $(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$





🧠 **تمرین:** در جای خالی یک گزاره بنویسید که ارزش گزاره‌های مرکب زیر طبق جدول باشد:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر..... آنگاه ۶ عدد اول است.		*
۲	اگر اولین روز هفته جمعه باشد آنگاه	*	
۳	اگر..... آنگاه کوچکترین عدد طبیعی زوج ۱ است	*	





▼ (۴) ترکیب دو شرطی دو گزاره: اگه توی ترکیبی بخوایم هم از p به q برسیم و هم از q به p به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشونش می‌دیم.



p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

♦ روش های خواندن ترکیب دو شرطی: ۱- p اگر و تنها اگر q ۲- اگر p آنگاه q و برعکس

۳- p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را ۴- p شرط لازم و کافی است برای q





🧠 **تمرین:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) (۹۷ عددی اول است) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} > \frac{1}{2}\right)$

ب) اگر ۳ فرد نباشد آن گاه ۱۲ مربع کامل است و برعکس.





تمرین: در جای خالی یک گزاره بنویسید که ارزش گزاره‌های مرکب زیر طبق جدول باشد:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	 اگر و تنها اگر هر مربع یک مستطیل باشد.		*
۲	اگر مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ باشد، آنگاه و برعکس	*	





👉 **تمرین:** اگر p گزاره‌ی نادرست q گزاره‌ی درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $(q \Rightarrow p) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

(ب) $(p \vee q) \Rightarrow \sim q$





👉 **نکته:** خیلی وقتاً به گزاره‌ی سوم (معمولاً r) میدان که ارزشش معلوم نیست، لیست شرایطی که با وجود r همیشه درستی یا نادرستی رو تشخیص داد یا نه به صورت زیره:

به بستگی نداره	به بستگی داره
یا درست همیشه یا نادرست	معلوم نیست درست یا نادرست
$F \wedge r \equiv F$	$T \wedge r \equiv r$
$T \vee r \equiv T$	$F \vee r \equiv r$
$r \Rightarrow T \equiv T$	$r \Rightarrow F \equiv \sim r$ $T \Rightarrow r \equiv r$
$F \Rightarrow r \equiv T$	$r \Leftrightarrow F \equiv \sim r$ $r \Leftrightarrow T \equiv r$



این جدول حفظ کردنی نیست!





🧠 **تمرین:** اگر p گزاره‌ی درست q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

ب) $(p \vee q) \vee r$

پ) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

ت) $(r \Rightarrow q) \vee q$

ث) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ج) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$





🧠 **تمرین:** اگر p گزاره‌ی درست q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(\sim r \Leftrightarrow \sim p) \vee \sim q$

ب) $\sim (\sim p \vee q) \Rightarrow r$

پ) $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$

ت) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r$





👉 **تمرین:** اگر $p \wedge q \equiv T$ باشد، ارزش $p \vee (q \wedge r)$ به چه صورت است؟





👉 **تمرین:** اگر گزاره $[\sim p \vee (q \Rightarrow r)] \sim$ درست باشد، ارزش گزاره زیر را مشخص کنید.

$$[r \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge [q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim r)]$$





رسم جدول ارزش‌گذاری گزاره‌های مرکب: اول تعداد گزاره‌ها را تشخیص می‌دیم، بعدش برای همه‌ی گزاره‌های موجود یک ستون اختصاص می‌دیم و آخر سر هم طبق قوانین ترکیب گزاره‌ها، ارزش هر ستون رو مشخص می‌کنیم:

تمرین: ارزش گزاره‌ی مرکب $p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ را با رسم جدول ارزش‌گذاری گزاره‌ها مشخص کنید.

p	q				$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				





تمرین: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام گزینه در مورد ستون نتیجه گزاره‌ی $\sim (p \wedge \sim q)$ درست است؟





تمرین: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هم‌ارزی $((p \vee q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$ را بررسی کنید.





👉 **نکته:** ارزش برخی از گزاره‌های مرکب، بدون توجه به ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آنها مشخص است:

۱) گزاره‌های همیشه **درست:**

$$۱) (p \vee \sim p) \equiv T$$

$$۲) (p \Rightarrow p) \equiv T$$

۲) گزاره‌های همیشه **نادرست:**

$$۱) (p \wedge \sim p) \equiv F$$

$$۲) (p \Leftrightarrow \sim p) \equiv F$$





👉 **تمرین:** حاصل هم‌ارزی $[\sim(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \vee q)]$ را مشخص کنید.





👉 **نکته:** خاصیت جابجایی و شرکت پذیری فقط برای ترکیب فصلی و عطفی برقراره:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$$





👉 **نکته:** دو تا هم‌ارزی خیلی مهم برای ترکیب شرطی:

عکس نقیض: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

شرط به فصل: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$





🧠 **تمرین:** عکسِ نقیض گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد آنگاه مضارب عدد ۲ اعدادی غیراول هستند.» را بنویسید.





👉 **تمرین:** گزاره‌ی «امروز پنجشنبه نیست یا فردا جمعه است.» را به صورت شرطی بنویسید.





👉 نکته: قانون توزیع پذیری و مشتقات آن:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

♦ قانون جذب:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

♦ قانون شبه جذب:

$$p \wedge (\sim p \vee r) \equiv p \wedge r$$

$$p \vee (\sim p \wedge r) \equiv p \vee r$$





🧠 **تمرین:** کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر، نادرست است؟ **سراسری ۹۸** خارج

$$(\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q) \text{ (۴)} \quad (\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p) \text{ (۳)} \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p \text{ (۲)} \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \text{ (۱)}$$





قوانین نقیض:

دمورگان $\sim (q \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim r$ فصلی و عطفی ۱) $\sim (q \vee r) \equiv \sim q \wedge \sim r$

دوشرطی ۳) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ شرطی ۲) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$





👉 **تمرین:** نقیض گزاره‌ی « ۲۵ مربع کامل است و ۲ عددی زوج است.» را بنویسید.





👉 **تمرین:** نقیض گزاره‌ی «اگر n عدد زوج طبیعی باشد، آنگاه بر ۲ بخش پذیر است» را بنویسید.





🧠 **تمرین:** نقیض گزاره‌ی « معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد اگر و تنها اگر مقدار دلتا مثبت باشد. » را بنویسید.

