

تَرسیم های هندسی و استدلال

فصل اول

هندسه دهم

بیاییم گفتیم و عشق را آغاز شد.

ترسیم‌های هندسی: 😊

در این قسمت ترسیم اشکالی مانند پاره خط، نیم خط، خط راست، دایره، مثلث و ... را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

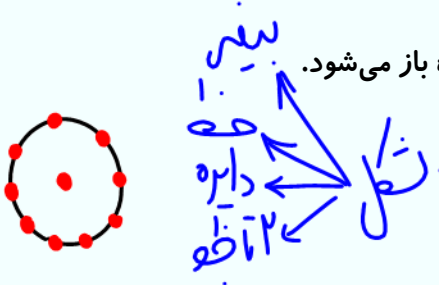
وسایل مورد نیاز برای رسم: ۱. خط کش ۲. پرگار 😊

خط کش فقط برای رسم خط راست است و نمی‌توان با آن فاصله‌ای را اندازه گرفت (یعنی غیر مدرج است) 😊

پرگار برای رسم دایره، کمان استفاده می‌شود و دهانه آن به اندازه دلخواه باز می‌شود. 😊

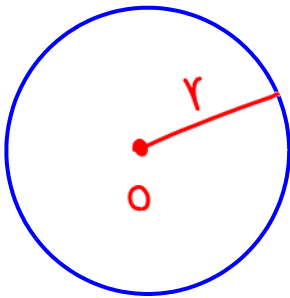
مکان هندسی: مجموعه نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند. 😊

مکان هندسی می‌تواند خط، صفحه، دایره و ... باشد.



معرفی چهار مکان هندسی مهم 😊

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله r از نقطه O قرار دارند دایره به مرکز O و شعاع r است. 😊



تمام نقاطی که از M به فاصله r باشند ←



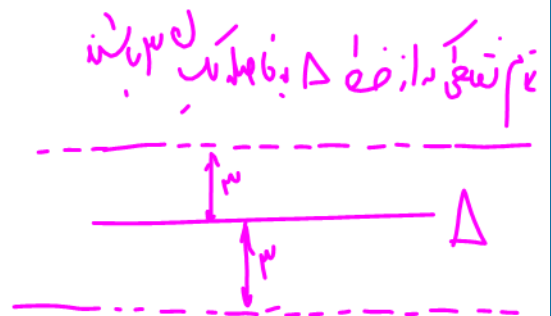
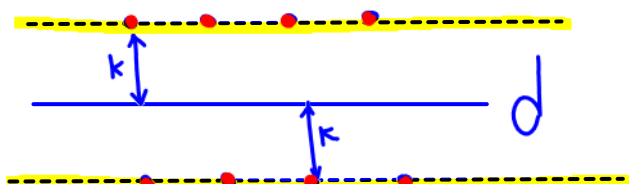
... از نقطه ثابت A به فاصله r باشند ←



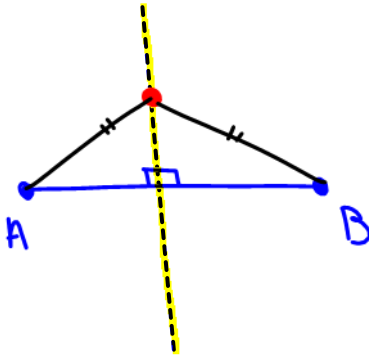
مکان هندسی ... از A به فاصله r ←

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند ... است. 😊

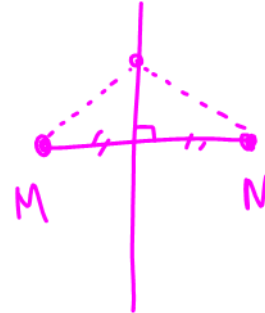
خط موازی به فاصله k از d و در دو طرف d



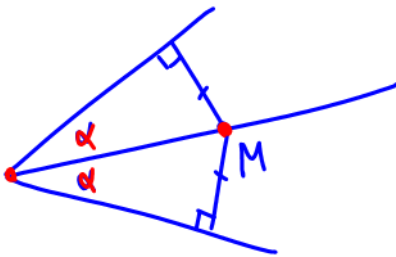
مثال: مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره خطی به یک فاصله‌اند AB است.



مکان هندسی از وسط پاره خطی M و N به فاصله 1 سانتی‌متر

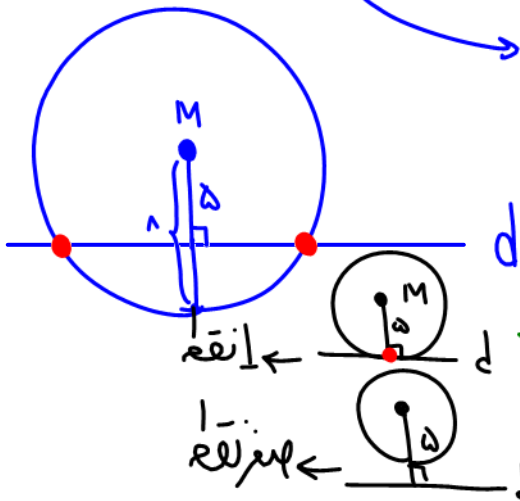


مثال: مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند α است.



نقاط برخورد مکان هندسی و یک شکل:

تست: نقطه M به فاصله 5 از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله 1 واحد از نقطه M وجود دارد؟



حایره به مرکز M و شعاع 1

دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲) ✓

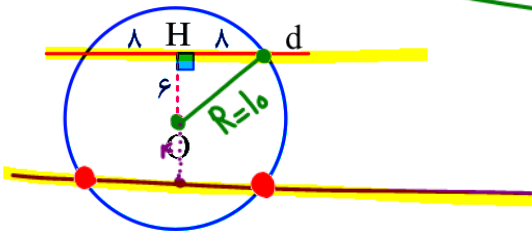
۳ (۳)

هیچ (۴)

نقطه M به فاصله 5 از خط d چند نقطه روی خط d به فاصله 1 از M ✓

..... M : ۱ ✓

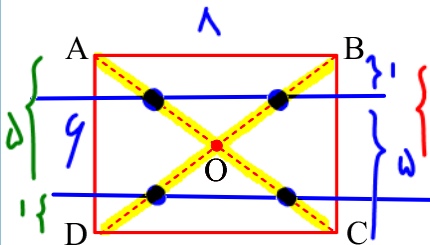
تست: در شکل زیر فاصله مرکز دایره از خط d برابر ۶ است، چند نقطه روی محیط دایره به فاصله ۱۰ واحد از d وجود دارد؟



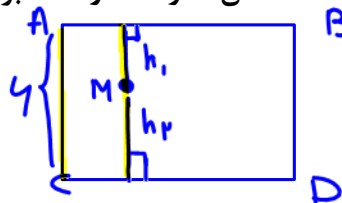
خط d وجود دارد؟
اختلاف فاصله از خط d به فاصله از خط d در ۲ طرف d

- (۱) ۲ ✓
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۴

تست: مستطیل ABCD به اضلاع $AB = ۸$ و $AD = ۶$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصله آن‌ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

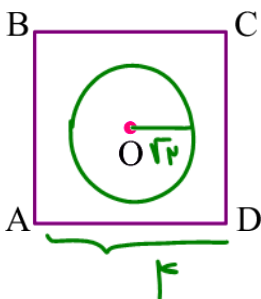


$$\begin{cases} h_1 + h_2 = 6 \\ h_1 - h_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 5 \\ h_2 = 1 \end{cases}$$



- (۱) هیچ
(۲) ۲
(۳) ۴ ✓
(۴) بی‌شمار

تست: در مربع ABCD به ضلع ۴ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که فاصله آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{2}$ واحد باشد؟

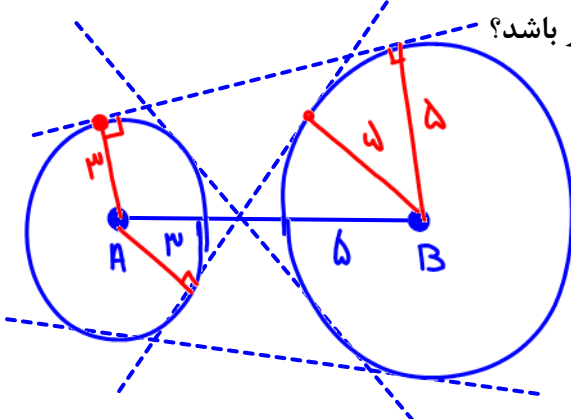


نقطه از O به فاصله $\sqrt{2}$



- واحد باشد؟
(۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) هیچ ✓

تست: پاره خط AB به طول ۱۲ سانتی‌متر در یک صفحه مفروض است. چند خط در این صفحه موجود است که از نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از نقطه B به فاصله ۵ سانتی‌متر باشد؟



دایره به مرکز B و شعاع ۵

دایره به مرکز A و شعاع ۳

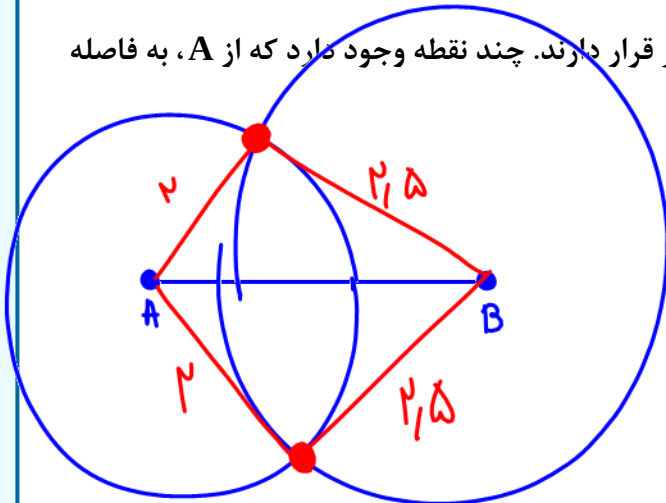
مسافت مشترک ۴ دایره

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴ ✓

نقاط برخورد دو مکان هندسی: 😊

این داستان تقریباً شبیه حالت قبلی است که در این سؤالات باید هر دو مکان هندسی را رسم کرده و نقاط اشتراک آن‌ها را بدست آوریم.

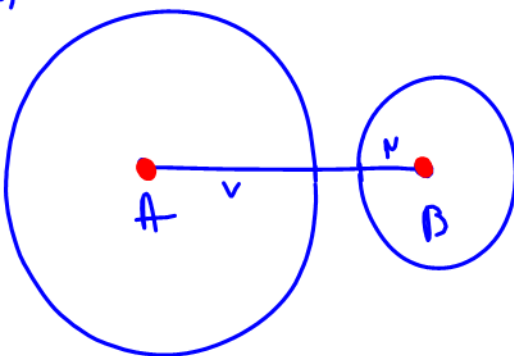
تست: 😊 دو نقطه A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه وجود دارد که از A، به فاصله ۲ و از B، به فاصله ۲/۵ سانتی‌متر باشند؟



- ۱ (۱)
۲ (۲) ✓
۳ (۳) صفر
۴ (۴) نامتناهی

از A به فاصله ۲
از B به فاصله ۲/۵

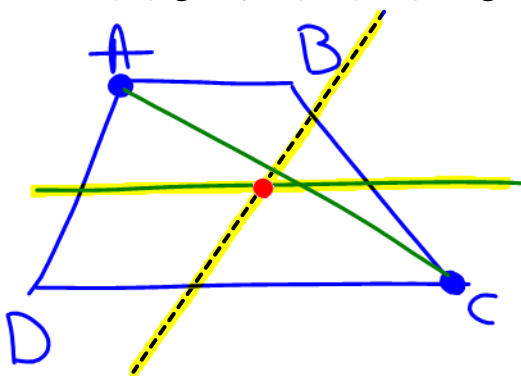
تست: 😊 پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۷ و از B به فاصله ۲ باشند؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳) صفر ✓
۴ (۴) نامتناهی

از A به فاصله ۷

تست: 😊 چند نقطه در صفحه دوزنقه ABCD وجود دارد که از دو رأس مقابل A و C و همچنین از دو قاعده به یک فاصله باشد؟



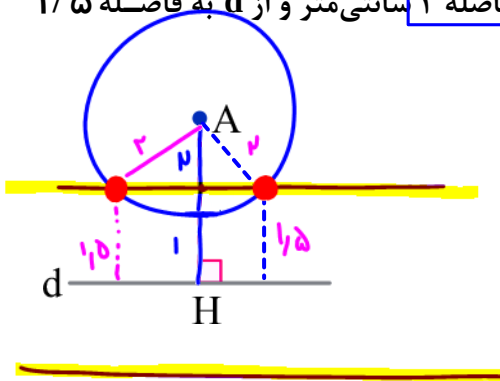
- ۱ (۱) هیچ
۲ (۲) دقیقاً یک ✓
۳ (۳) حداکثر دو
۴ (۴) نامشخص

از AB، CD به یک فاصله

از A، C به یک فاصله

تست: با توجه به شکل چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۱/۵

سانتی‌متر باشد؟



دایره مرکز A شعاع ۲

از d به فاصله ۱/۵ ← ۲ خط در ۲/۵ فاصله به فاصله ۱/۵ از d

(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) ۲ ✓

(۴) بی‌شمار

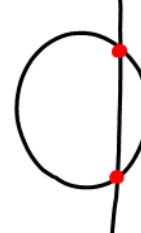
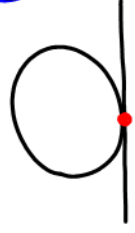
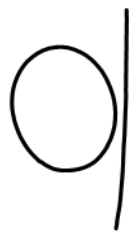
تست: نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاط هم‌فاصله از A و B که به فاصله ۳ سانتی‌متر از C

باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

دایره مرکز A و شعاع ۳

خط AB → محور منصف AB

خط



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴ ✓

۲ برخورد و ۲ راه: جواب

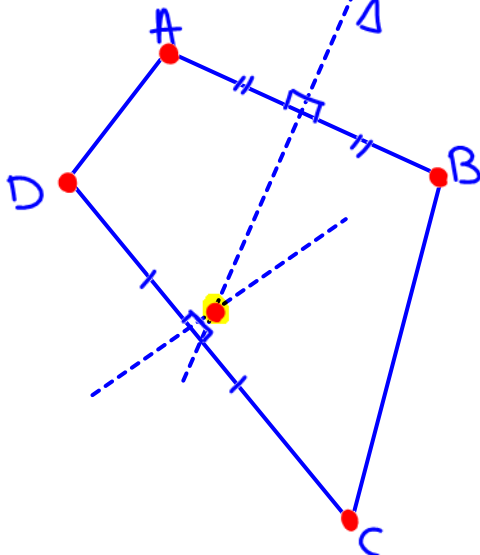
۰ برخورد

۱ برخورد

۲ برخورد

تست: در چهار ضلعی ABCD اضلاع AB و CD غیر موازی‌اند، چند نقطه یافت می‌شود که

رئوس A و B و همچنین از رئوس C و D به یک فاصله باشند؟



(۱) هیچ

(۲) ۱ ✓

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

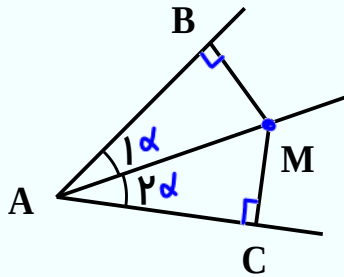
محور منصف AB

محور منصف CD

رسم نیمساز: 🤗

روش رسم نیمساز یک زاویه: 🤗

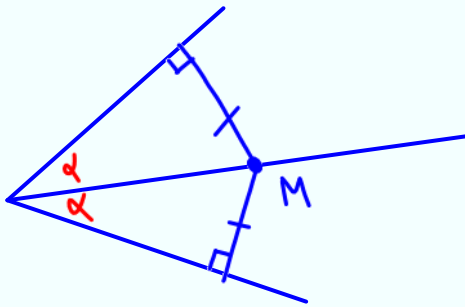
تعریف نیمساز یک زاویه: نیم خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. 🤗



$$A_1 = A_2 \rightarrow MB = MC$$

تذکره: هر نقطه روی نیمساز از اضلاع به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد نیز

روی نیمساز آن زاویه واقع است.



روش رسم نیمساز: 🤗

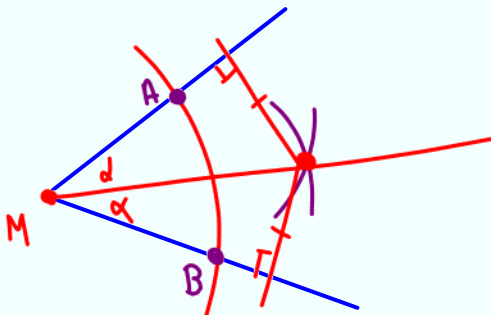
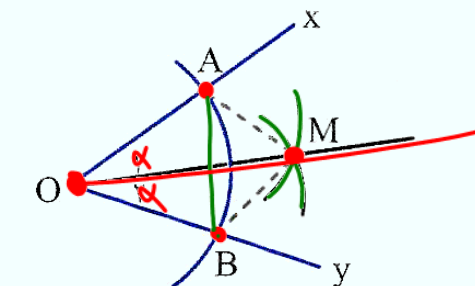
برای رسم نیمساز زاویه داده شده xOy ، ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه یک کمان رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند.

به مرکزهای A و B و به شعاع بزرگتر از $\frac{AB}{2}$ کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا حتماً یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند.

مثلث‌های OAM و OBM به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند،

بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ یعنی M روی نیمساز است و امتداد OM

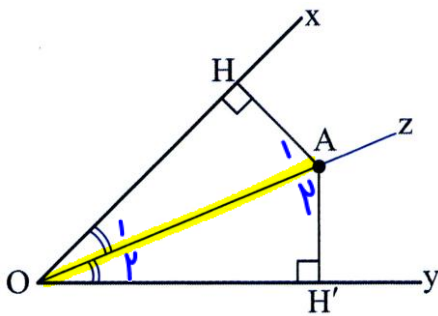
نیمساز زاویه xOy است.



① مدّال O و شعاع دلخواه

② مدّال A و B و شعاع بزرگتر از $\frac{AB}{2}$

مثال: نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد. ثابت کنید $AH = AH'$.



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (فرض)} \\ OA = OA \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

فرض

ب-ر اجابت مسئله

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$	فرض
$AH = AH'$	حکم

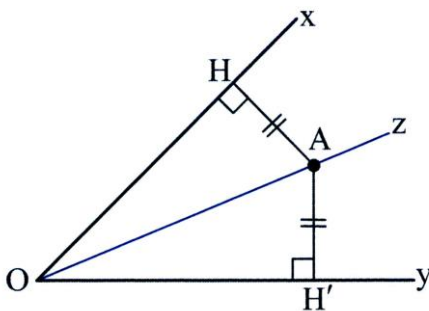
$$\triangle OAH \cong \triangle OA'H'$$

$$\boxed{AH = AH'}$$

$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{H} + \hat{A}_1 = 180 \\ \hat{O}_2 + \hat{H}' + \hat{A}_2 = 180 \end{cases}$$

xx تا اینجا xx

مثال: فاصله نقطه A از Ox و Oy برابر است. ثابت کنید نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد. (H.W)



تست: با معلوم بودن زاویه 80° و داشتن خط کش و پرگار، کدام یک از زوایای زیر قابل رسم نیست؟

(۱) 25°

(۲) $32/5^\circ$

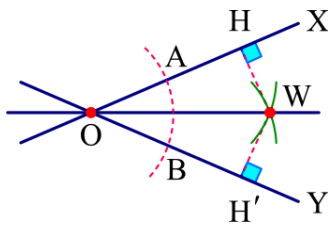
(۳) $17/5^\circ$

(۴) 72°

تست: درون مثلث ABC حداکثر چند نقطه وجود دارد که از BC به فاصله l و از AB و AC به یک فاصله باشد؟

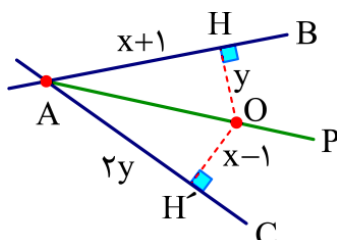
- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۳
(۴) بی‌شمار

تست: زاویه XOY مطابق شکل مفروض است. کدام یک از مراحل زیر جزء مراحل رسم نیمساز این زاویه محسوب می‌شود؟



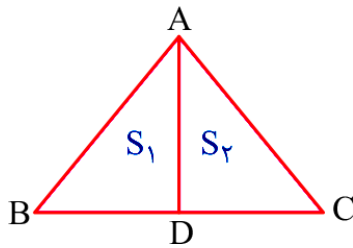
- (۱) رسم کمان به مرکز O و به شعاع OW
(۲) رسم عمودهایی از W بر اضلاع زاویه
(۳) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه روی اضلاع زاویه
(۴) رسم کمان‌هایی به مراکز A و B و به شعاع بزرگ‌تر از نصف طول AB

تست: در شکل زیر اگر $C\hat{A}B$ دو برابر زاویه $C\hat{A}P$ باشد، اندازه OA چقدر است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) $2\sqrt{5}$

تست: مطابق شکل در مثلث ABC به اضلاع $AB = 4$ ، $BC = 8$ ، $AC = 6$ نیمساز AD را رسم کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث‌های ADB و ADC را به ترتیب S_1 و S_2 بنامیم، کدام رابطه صحیح است؟



(۱) $S_1 = S_2$

(۲) $2S_1 = 3S_2$

(۳) $3S_1 = 2S_2$

(۴) $S_1 > S_2$

تست: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، نقطه M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می‌کند، اگر $\hat{NBC} = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\hat{MNB}$ چند درجه است؟ (داخل ۱۴۰۱)

(۱) 48

(۲) 56

(۳) 66

(۴) 78

تست: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 34^\circ$ ، $AC = AB$)، قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم. زاویه $\hat{DAC}$ چند درجه است؟ (مدارس برتر تهران)

(۱) 36°

(۲) $36/5^\circ$

(۳) $39/5^\circ$

(۴) 39°

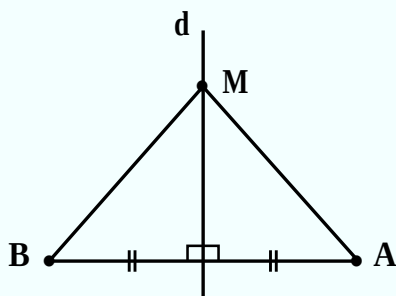
تست: فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC ، همواره یکسان است؟ (کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) تلاقی سه ارتفاع
- (۲) تلاقی سه ارتفاع
- (۳) تلاقی سه نیمساز
- (۴) تلاقی سه عمود منصف

رسم عمود منصف:

روش رسم عمود منصف یک پاره خط:

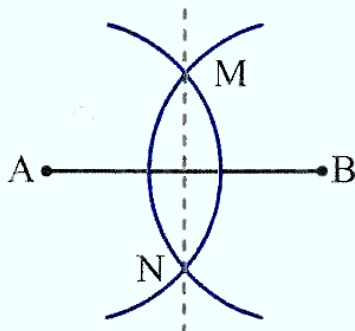
تعریف عمود منصف یک پاره خط: عمود منصف یک پاره خط، خطی عمود بر پاره خط است که از وسط آن نیز می‌گذرد.



$$d \perp AB \rightarrow MB = MC$$

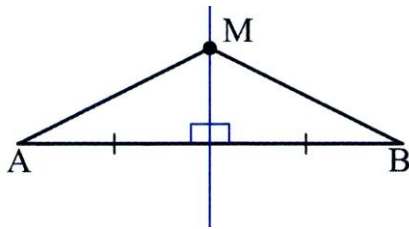
تذکره: هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد نیز روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

روش رسم عمود منصف:

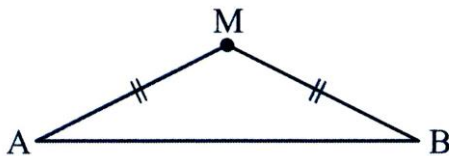


برای رسم عمود منصف پاره خط داده شده AB ، ابتدا دو کمان به مراکز A و B و به شعاع یکسان (بزرگتر از نصف طول پاره خط AB) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. هر دو نقطه M و N از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، پس روی عمود منصف AB قرار دارند. بنابراین اگر M را به N وصل کنیم، عمود منصف پاره خط AB به دست می‌آید.

مثال: نقطه M روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد. ثابت کنید $MA = MB$.

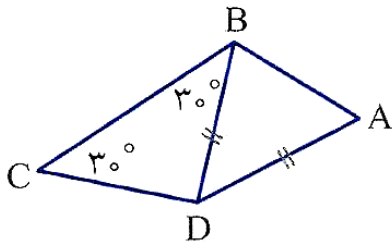


مثال: فاصله نقطه M از A و B برابر است. ثابت کنید نقطه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.



مثال: وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ (تقریب ۷ صفحه ۷ کتاب درسی)

تست: با توجه به شکل زیر، کدام گزینه همواره صحیح است؟ 🧐



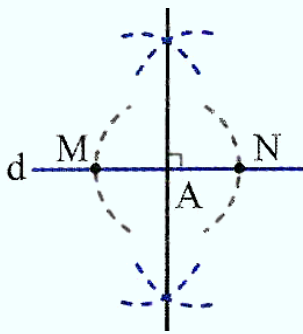
- (۱) روی نیمساز زاویه ADC است.
- (۲) روی نیمساز زاویه ABC است.
- (۳) B روی عمود منصف AC است.
- (۴) D روی عمود منصف AC است.

تست: برای رسم عمود منصف پاره خط AB به طول ۱۰، دهانه پرگار را به اندازه R باز می‌کنیم. R کدام

می‌تواند باشد؟

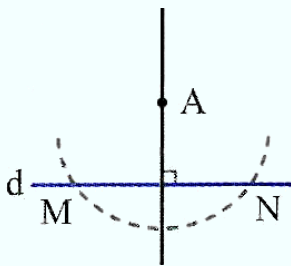
- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن 😊



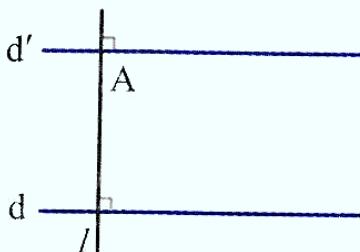
به مرکز A و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت A وسط پاره خط MN است. حال اگر عمود منصف پاره خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمود منصف، خطی است که در نقطه A بر خط d عمود است.

روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه خارج آن 😊



به مرکز A و به شعاع بزرگتر از فاصله نقطه A تا خط، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت نقطه A از M و N به یک فاصله است بنابراین A روی عمود منصف پاره خط MN قرار دارد. اگر عمود منصف پاره خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمود منصف، خطی است که از نقطه A گذشته و بر خط d عمود است.

روش رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن 😊



فرض می‌کنیم خط d و نقطه A خارج آن داده شده باشد. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از A بگذرد و با خط d موازی باشد. ابتدا l را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه A بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط d' را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از A بگذرد و بر l عمود باشد. در این صورت خطوط d و d' بر خط l عمودند، بنابراین موازی‌اند.

تست: در رسم خطی موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن، کدام یک از موارد زیر به کار نمی‌رود؟

- (۱) دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند.
- (۲) از یک نقطه روی یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.
- (۳) از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.
- (۴) در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند.

تست: پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانه پرگار را به اندازه $3a-1$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای اینکه ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

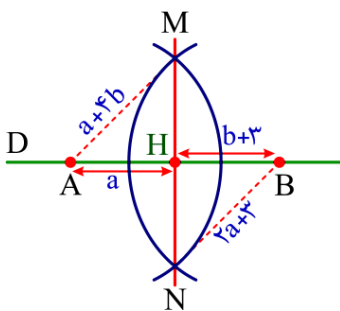
(۱) $0 < a < 2$

(۲) $\frac{1}{3} < a < 2$

(۳) $a > 2$

(۴) $a > \frac{11}{3}$

تست: دو نقطه A و B مطابق شکل روی خط D مفروض‌اند. شکل زیر ترسیم عمود منصف پاره خط AB را نشان می‌دهد که در رسم آن، به مراکز A و B کمان‌هایی رسم شده، در صورتی که $AH = a$ و $BH = b + 3$ باشد، فاصله دو نقطه M و N از هم کدام است؟



(۱) ۲۶

(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

تست: در رسم خط عمود بر خط d از نقطه M خارج خط d طبق روش بیان شده در کتاب درسی اولین گام کدام است؟

- (۱) رسم دو خط غیر عمود بر خط d
- (۲) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه روی خط d
- (۳) رسم دایره‌ای به مرکز M که خط d را در دو نقطه قطع کند.
- (۴) پیدا کردن پای عمود روی خط d

تست: در رسم کدام یک از موارد زیر طبق روش‌های کتاب درسی نیاز به ترسیم کمان‌های بیشتری داریم؟

- (۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
- (۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- (۳) رسم خط موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن
- (۴) هر سه یکسان هستند.

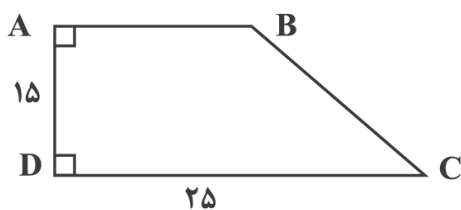
تست: در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

- (۱) ترسیم خطی موازی یک خط
- (۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
- (۳) ترسیم عمود منصف یک پاره‌خط
- (۴) ترسیم خطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است.

تست: در ترسیم ارتفاع AH از مثلث ABC طبق روش بیان شده در کتاب درسی کدام ترسیم در صورت نیاز متقدم بر سایرین است؟

- (۱) ترسیم عمود منصف ضلع BC
- (۲) ترسیم کمانی به مرکز A و متقاطع با BC
- (۳) ترسیم خط گذرا از A و عمود بر BC
- (۴) ترسیم کمان‌هایی به مراکز B و C و به شعاع بزرگتر از نصف BC

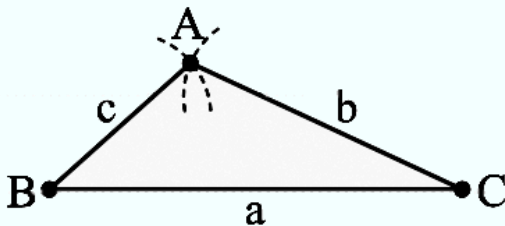
تست: در شکل زیر اگر عمود منصف قطر AC قاعده CD را در نقطه M قطع کند، آن‌گاه طول پاره‌خط MD کدام است؟



- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

رسم مثلث: 😊

فرض کنید می‌خواهیم مثلث ABC را با اضلاع a ، b و c رسم کنیم. ابتدا پاره خط BC به طول a را رسم می‌کنیم سپس دهانه پرگار را به اندازه b باز کرده به مرکز C کمانی می‌زنیم و بار دیگر دهانه پرگار را به اندازه C باز کرده به مرکز B کمانی می‌زنیم این کمان‌ها همدیگر را در نقطه A قطع می‌کند که مثلث ABC رسم می‌شود.



چند تذکر: 🤔

تذکره: اگر a ، b و c بخوهند ضلع یک مثلث باشند باید همواره: 🤔

طول ضلع بزرگ > مجموع طول دو ضلع کوچک‌تر

تذکره ۲: اگر یک ضلع مثلث مجهول و دو ضلع دیگر معلوم باشد، حدود ضلع مجهول اینگونه است: (قضیه نامساوی مثلث (حمار)) 🤔

مجموع دو ضلع معلوم < طول ضلع مجهول < تفاضل دو ضلع معلوم |

تست: با کدام یک از اعداد داده شده می‌توان یک مثلث رسم کرد؟ 🧐

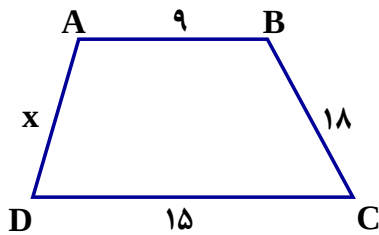
(۱) ۵، ۳، ۲

(۲) ۸، ۴، ۳

(۳) ۹، ۸، ۴

(۴) ۱۰، ۷، ۲/۵

تست: دوزنقه ABCD روبه‌رو قابل ترسیم است. x کدام عدد می‌تواند باشد؟



(۱) ۲

(۲) ۱۴

(۳) ۱۶

(۴) ۱۰

تست: مثلث ABC با اضلاع $a+7$, $6a$, $4a-4$ با خط‌کش و پرگار قابل ترسیم است. حدود a کدام است؟

(۱) $\frac{11}{9} < a < 3$

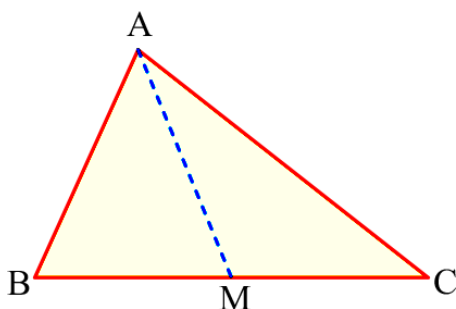
(۲) $\frac{11}{3} < a < 9$

(۳) $\frac{11}{3} < a < \frac{11}{9}$

(۴) $3 < a < 9$

تست: در مثلث مقابل ترسیم ABC مطابق شکل AM میانه است، اگر $AM = 5$, $AC = a+1$, $BC = 8$ باشد،

حدود a کدام است؟



(۱) $0 < a < 9$

(۲) $2 < a < 11$

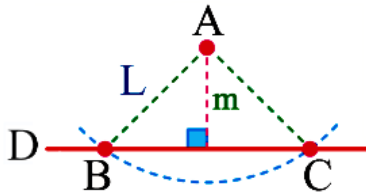
(۳) $1 < a < 9$

(۴) $0 < a < 8$

رسم مثلث متساوی الساقین: 😊

سؤال: 😊 مثلث متساوی الساقین رسم کنید که رأس آن و قاعده آن روی خط D و فاصله A از D برابر m باشد.

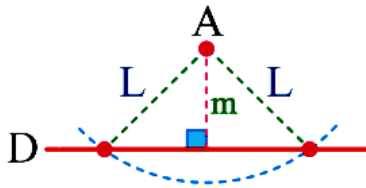
توضیح:



در این حالت مسأله چند جواب دارد؟

سؤال: 😊 مثلث متساوی الساقین رسم کنید که رأس آن و قاعده آن روی خط D و فاصله A از D برابر m بوده و طول ساق آن L باشد.

توضیح:



در این حالت مسأله چند جواب دارد؟

سؤال: 😊 مثلث متساوی الساقین رسم کنید که رأس آن و قاعده آن روی خط D بوده فاصله A از D برابر m باشد و مساحت آن S باشد.

توضیح:

در این حالت مسأله چند جواب دارد؟

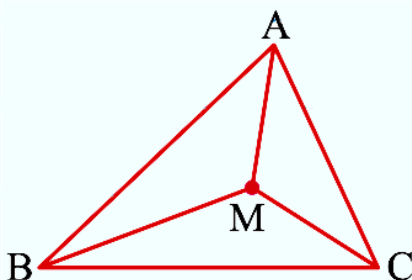
تست: نقطه A به فاصله ۸ سانتی‌متر از خط d واقع است، چند مثلث متساوی الساقین به رأس A و طول ساق ۱۷ می‌توان رسم کرد که قاعده آن‌ها بر خط d واقع باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) هیچ
- (۴) بی‌شمار

تست: نقطه A به فاصله ۶ سانتی‌متر از خط d قرار گرفته است، چند مثلث متساوی الساقین به مساحت ۲۴ سانتی‌متر مربع می‌توان رسم کرد که قاعده آن‌ها بر خط d واقع باشد و نقطه A رأس مثلث باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) هیچ
- (۴) بی‌شمار

تذکره مهم: اگر نقطه M درون مثلث ABC قرار بگیرد آنگاه مجموع فواصل M از سه رأس بین محیط و نصف محیط است.

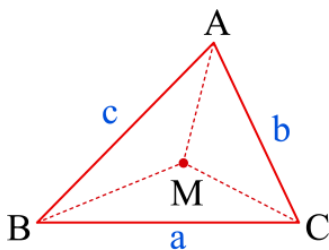


$$P < MA + MB + MC < 2P$$

تست: در مثلث ABC به محیط ۱۸ اگر نقطه O داخل مثلث قرار گرفته باشد، حاصل $OA + OB + OC$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۹
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۰

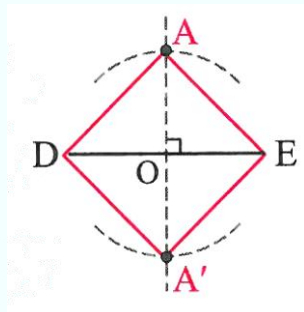
تست: اگر در شکل مقابل $MA + MB + MC = ۱۲$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + b + c$ کدام عدد ممکن است باشد؟



- (۱) ۱۶
- (۲) ۲۴
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

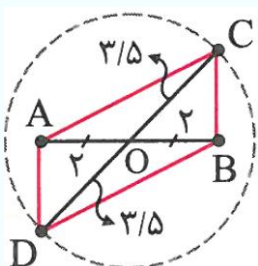
روش رسم برخی چهار ضلعی‌ها با اطلاعات مشخص 🤔

نحوه رسم مربع با طول قطر مشخص: 😊



می‌دانیم در مربع، قطرهای عمود منصف یکدیگرند. پس برای پیدا کردن دو رأس مربع (A', A) ابتدا عمود منصف پاره خط DE را رسم می‌کنیم. به این ترتیب نقطه O ، محل تلاقی DE و عمود منصف مشخص می‌شود که همان محل برخورد قطرهای مربع است. حال به دلیل اینکه قطرهای مربع برابرند، دهانه پرگار را به اندازه OD باز کرده و به مرکز O کمان می‌زنیم تا عمود منصف را در نقاط A و A' قطع کند. حال نقاط را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا مربع تشکیل شود.

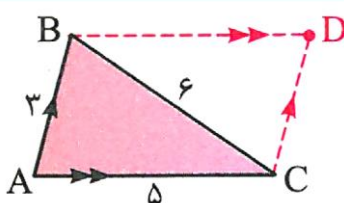
نحوه رسم متوازی‌الاضلاع با قطرهایی به طول ۴ و ۷ واحد: 😊 (تقریباً صفحه ۱۵ کتاب درسی)



می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند. ابتدا پاره خط $AB = 4$ را رسم می‌کنیم و وسط آن را O می‌نامیم. سپس به مرکز O و به شعاع $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. حال یکی از قطرهای این دایره را رسم می‌کنیم (غیر از قطری که از نقاط A و B عبور می‌کند) و آن را CD می‌نامیم. چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر است. با داشتن اندازه دو قطر، بی‌شمار متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد.

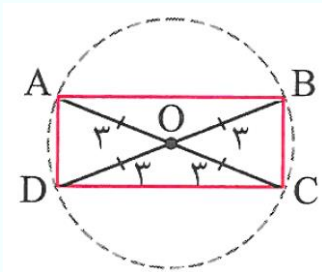
🤔 **تذکر:** در سؤالات ترسیم، اگر تعداد شکل‌های قابل رسم را بخواهیم، باید شکل‌های هم‌نهشت را در شمارش، یکی محسوب کنیم.

نحوه رسم متوازی‌الاضلاع با اضلاع به طول ۳ و ۵ و طول قطر ۶ واحد: 😊



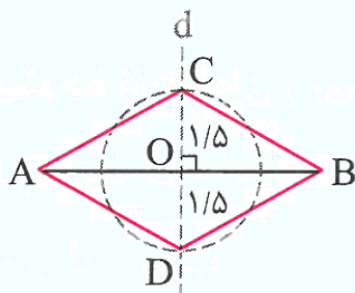
مطابق شکل، ابتدا مثلث ABC را با سه ضلع معلوم رسم می‌کنیم. سپس از B خطی موازی ضلع AC و از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند. $ABDC$ متوازی‌الاضلاع منحصر به فرد مورد نظر، است.

نحوه رسم مستطیل به قطر ۶ واحد: (قرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)



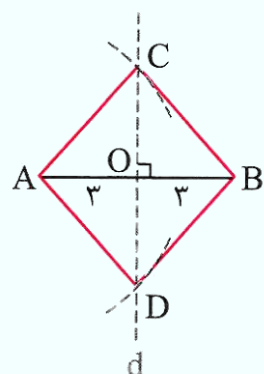
می‌دانیم قطرهای مستطیل با هم برابر و منصف یکدیگرند. پس برای رسم مستطیل، ابتدا نقطه دلخواه O را به عنوان مرکز مستطیل در نظر می‌گیریم. سپس به مرکز O و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم و در مرحله بعد دو قطر دلخواه AC و BD را مطابق شکل رسم می‌کنیم. در چهارضلعی ABCD قطرهای مساوی و منصف یکدیگرند؛ پس این چهارضلعی مستطیل مورد نظر است. توجه کنید که با داشتن طول دو قطر، می‌توان بیشمار مستطیل رسم کرد.

نحوه رسم لوزی به قطرهای ۳ و ۵ واحد: (قرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی)



می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی، شرط لازم و کافی آن است که قطرهای چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. پس برای رسم لوزی، ابتدا پاره خط AB به طول ۵ را رسم کرده و سپس عمود منصف آن را رسم می‌کنیم (d) و محل برخورد عمود منصف با AB را O می‌نامیم. حال به مرکز O و به شعاع $\frac{3}{2} = 1.5$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های C و D قطع کند. ACBD لوزی مورد نظر است.

نحوه رسم لوزی به ضلع ۵ و قطر ۶ واحد: (قرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی)



ابتدا پاره خط AB = ۶ و سپس عمود منصف آن را رسم می‌کنیم (d). حال به مرکز A و شعاع ۵ (طول ضلع لوزی) رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند که رأس‌های دیگر لوزی هستند.

توجه: با توجه به تمام مطالب گفته شده واضح است که دانستن ویژگی‌های اضلاع، زوایای و قطرهای چهار ضلعی‌های خاص مانند متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی برای تشخیص تعداد چهار ضلعی‌ها قابل رسم، مفید است.

تست: کدام یک از اشکال هندسی زیر با معلومات داده شده به صورت منحصر به فرد (یکتا) قابل رسم است؟ 

- (۱) مستطیلی که طول قطر آن ۴ باشد.
- (۲) لوزی که طول ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۶ باشد.
- (۳) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۵ و ۸ باشد.
- (۴) متوازی‌الاضلاعی که طول اضلاع آن ۴ و ۶ باشد.

تست: چند متوازی‌الاضلاع مختلف وجود دارد که اندازه قطرش ۱۳ و اندازه اضلاعش ۵ و ۷ باشد؟ 

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بی‌شمار

تست: چند لوزی مختلف وجود دارد که اندازه قطرهایش ۶ و ۹ باشد؟ 

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بی‌شمار

تست: چند لوزی مختلف وجود دارد که اندازه یکی از قطرهایش ۱۰ و اندازه اضلاعش ۷ باشد؟ 

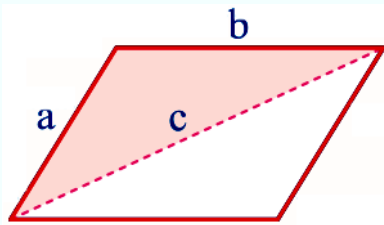
- (۱) بی‌شمار
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) ۰

تست: چند لوزی مختلف وجود دارد که اندازه اضلاعش ۵/۲ و اندازه یک قطرش ۶ باشد؟ 

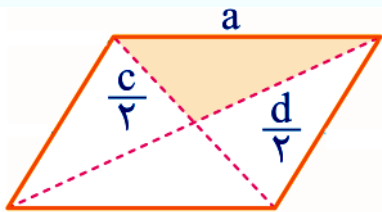
- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۴

چند تذکر مهم: 🤔

🤔 **تذکره ۱:** برای اینکه یک متوازی الاضلاع به اضلاع a و b و قطر c (که گفته بودیم) قابل رسم باشد باید اعداد a ، b و c در شرایط نامساوی مثلثی صدق کنند.



🤔 **تذکره ۲:** برای اینکه یک متوازی الاضلاع به قطرهای c و d و ضلع a قابل رسم باشد باید نصف قطرهای a و ضلع a در شرایط نامساوی مثلث صدق کنند.



🤔 **تذکره ۳:** اگر دو قطر و زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع معلوم باشد همواره تنها یک متوازی الاضلاع قابل رسم است.

🧐 **تست:** متوازی الاضلاع به اضلاع ۵ و ۸ و قطر $2a - 1$ قابل رسم است. حدود a کدام است؟

$$(1) \quad 2 < a < 7$$

$$(2) \quad 3 < a < 8$$

$$(3) \quad 0 < a < 6$$

$$(4) \quad 5 < a < 9$$

تست: دو پاره خط به طول های $5x$ و $x + 5$ اضلاع یک متوای الاضلاع و پاره خطی به طول $3x - 2$ یکی از قطرهای آن است. حدود x کدام است؟

$$(1) \frac{7}{6} < a < 3$$

$$(2) \frac{6}{7} < a < 3$$

$$(3) 1 < a < \frac{7}{3}$$

$$(4) 1 < a < 3$$

تست: چند متوازی الاضلاع غیر هم نهشت به اضلاع ۳ و ۹ و قطر ۷ وجود دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) هیچ

(۴) ۴

تست: چند متوازی الاضلاع مختلف می توان رسم کرد که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

تست: چند متوازی الاضلاع مختلف می توان رسم کرد که اندازه قطرهای آن ۵ و ۷ و زاویه بین قطرهایش 30° باشد؟

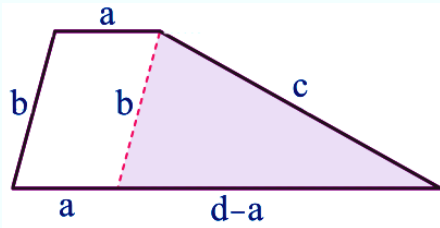
(۱) صفر

(۲) ۱

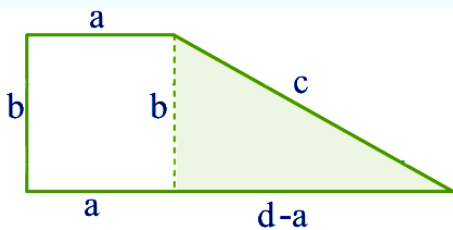
(۳) ۲

(۴) بی شمار

تذکره: برای اینکه دوزنقه‌ای به قاعده‌های a و d و ساق‌های b و c قابل رسم باشد باید اندازه ساق‌ها و تفاضل دو قاعده در نامساوی مثلثی صدق کند.



تذکره: و در دوزنقه قائم الزاویه اندازه دو ساق و تفاضل دو قاعده باید در قضیه فیثاغورس صدق کند.



$$\Rightarrow b^2 + (d-a)^2 = c^2$$

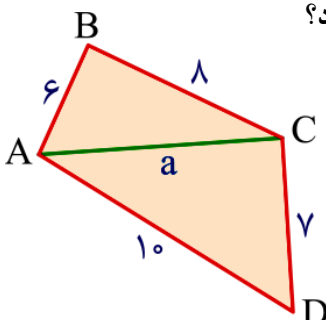
تست: اندازه دو ساق یک دوزنقه غیر قائم الزاویه ۴ و ۱۰ و قاعده کوچک آن ۷ است. قاعده بزرگ کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۲۲
- (۳) ۱۹
- (۴) ۱۰

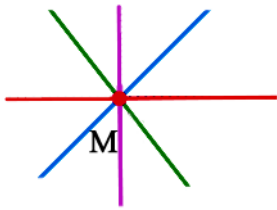
تست: در یک دوزنقه غیر قائم الزاویه اندازه قاعده‌ها ۵ و ۱۳ و اندازه ساق کوچک برابر ۳ است، اندازه ساق دیگر کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۵
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۱
- (۴) ۱۲

تست: در چهار ضلعی ABCD مطابق شکل برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟



- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳



خطوط هم‌رس در مثلث

تعریف خطوط هم‌رس: خطوطی که از یک نقطه مانند M عبور کنند.

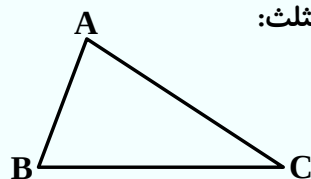
توجه: در هر مثلث عمود منصف‌ها، نیمسازها، ارتفاع‌ها، میانه‌ها در یک نقطه هم‌رسند.

هم‌رسی عمود منصف‌ها:

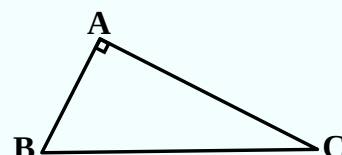
قضیه: ثابت کنید عمود منصف‌های سه ضلع مثلث هم‌رس هستند.

توجه: محل هم‌رسی عمود منصف‌ها با توجه به زاویه مثلث:

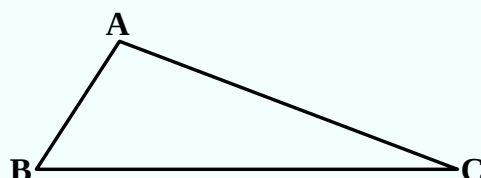
A = حاده



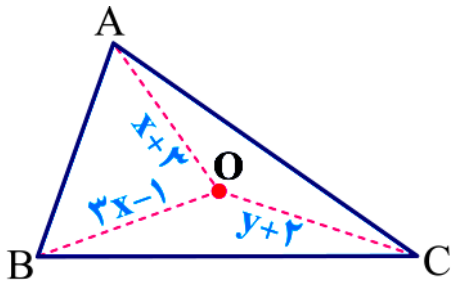
A = قائمه



A = منفرجه



تست: در مثلث ABC مطابق شکل، نقطه O روی محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC قرار دارد. $x+y$ کدام است؟



(۱) $4/5$

(۲) $5/5$

(۳) 6

(۴) 5

تست: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با اضلاع قائم $4\sqrt{5}$ ، $2\sqrt{10}$ عمود منصف وتر، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند، مجموع فواصل نقطه D از رئوس مثلث چقدر است؟

(۱) $7\sqrt{5}$

(۲) $5\sqrt{5}$

(۳) $4\sqrt{5}$

(۴) $3\sqrt{5}$

تست: در مثلث ABC به ضلع $AC = 2\sqrt{69}$ ، عمودمنصف‌های دو ضلع مجاور AB و BC همدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند، اگر فاصله نقطه M از رأس A برابر ۱۳ باشد، مساحت مثلث MAC کدام است؟

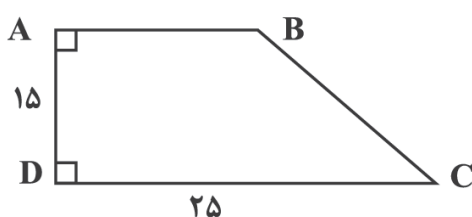
(۱) $5\sqrt{69}$

(۲) $10\sqrt{69}$

(۳) $15\sqrt{69}$

(۴) $20\sqrt{69}$

تست: در شکل زیر اگر عمودمنصف قطر AC قاعده CD را در نقطه M قطع کند، آن‌گاه طول پاره خط MD کدام است؟



(۱) 7

(۲) 8

(۳) 9

(۴) 10

همرسی نیمسازها: 😊

🧐 **قضیه:** ثابت کنید در هر مثلث نیمسازهای داخلی هر مثلث هم‌سند.

🧐 **قضیه:** ثابت کنید هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز زاویه قرار دارد.

🧐 **تست:** در مثلث قائم‌الزاویه ABC با اضلاع قائم 6 ، 8 و a فاصله محل تلاقی نیمسازهای داخلی تا ضلع BC برابر 2 است. مجموع فواصل این نقطه از دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

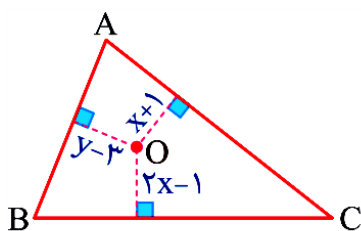
(۱) ۳

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۴) ۴

🧐 **تست:** مطابق شکل نقطه O روی محل تلاقی نیمسازهای زوایای B و C قرار دارد. مقدار $x+y$ کدام است؟



(۱) $7/5$

(۲) ۹

(۳) ۸

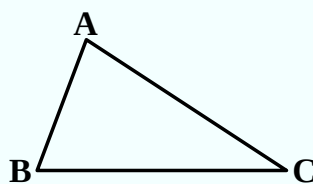
(۴) ۷

همرسی ارتفاع‌ها: 🤗

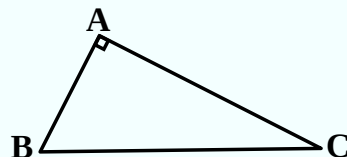
🤔 **قضیه:** ثابت کنید در هر مثلث ارتفاع‌ها همرسند.

🤔 **توجه:** محل همرسی ارتفاع‌ها با توجه به زاویه مثلث:

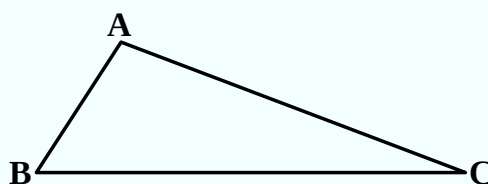
$A = \text{حاده}$



$A = \text{قائمه}$



$A = \text{منفرجه}$



تست: در مثلث ABC ، اگر $\hat{A} = 35^\circ$ و $\hat{B} = 45^\circ$ باشد، محل تلاقی ارتفاع‌ها کجا قرار دارد؟ 🧐

- (۱) داخل مثلث
- (۲) خارج مثلث
- (۳) روی یکی از رأس‌ها
- (۴) روی یکی از اضلاع

تست: در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ فاصله محل تلاقی سه ارتفاع از محل تلاقی سه عمود منصف کدام است؟ 🧐

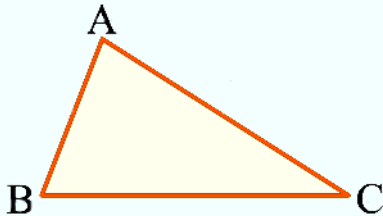
- (۱) ۵/۵
- (۲) ۶/۵
- (۳) ۷/۵
- (۴) ۸/۵

تست: در مثلث ABC به اضلاع $a=10$ ، $b=8$ ، $c=6$ وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، در مثلث حاصل فاصله محل تلاقی ارتفاع‌ها از رأس B کدام است؟ 🧐

- (۱) ۵
- (۲) ۴/۵
- (۳) ۳/۵
- (۴) ۳

همرسی میانه‌ها: 🌟

در هر مثلث میانه‌ها هم‌رسند.



🧐 **تذکر:** محل تلاقی میانه‌ها را مرکز ثقل نیز می‌گویند.

🧐 **تست:** در مثلث ABC ، نقطه G محل برخورد میانه‌های AM, BN, CP است. در مثلث MNP نقطه G چه نقطه‌ای است؟

- (۱) محل برخورد میانه‌ها
- (۲) محل برخورد عمود منصف‌ها
- (۳) محل برخورد نیمسازها
- (۴) محل برخورد ارتفاع‌ها

🧐 **تست:** در مثلثی به اضلاع $a+3, 2a+1, 3b-1$ محل تلاقی ارتفاع‌ها بر محل تلاقی میانه‌ها منطبق است، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) ۴

تست: در مثلث ABC وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم، در مثلث حاصل محل تلاقی میانه‌ها منطبق به محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است، نوع مثلث ABC کدام است؟

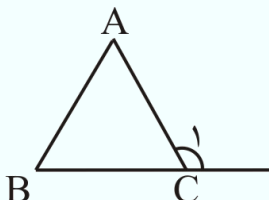
- (۱) متساوی الساقین
- (۲) متساوی الاضلاع
- (۳) قائم الزویه
- (۴) هر نوع مثلثی می‌تواند باشد.

مثلث و چند نامساوی در مثلث:

قضیه: ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

قضیه: ثابت کنید مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است. (این قضیه برای هر n ضلعی محدب برقرار است)

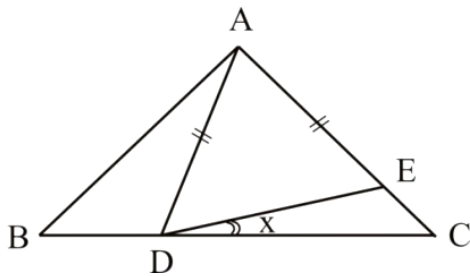
قضیه: ثابت کنید در هر مثلث هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش می‌باشد.



$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$$

نتیجه: در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی

تست: در شکل روبرو $AB = AC$ و $AE = AD$ اگر $\hat{BAD} = 30^\circ$ آنگاه x کدام است؟ 🧐



۱۰ (۱)

۱۵ (۲)

۲۰ (۳)

۲۵ (۴)

نامساوی در مثلث 🤔

قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبرو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبرو به ضلع کوچک‌تر 🧐

عکس قضیه: اگر در مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبرو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبرو به زاویه کوچک‌تر 🧐

مثال: فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد. دلایل هریک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه نهایی که در پایان آمده است را کامل کنید. (تقریب کتاب درسی)

الف) $D_2 > A_1$ ، زیرا

ب) $D_2 > A_2$ ، زیرا

پ) $AC > DC$ ، زیرا

تست: در مثلث ABC ، نیم ساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره درست است؟

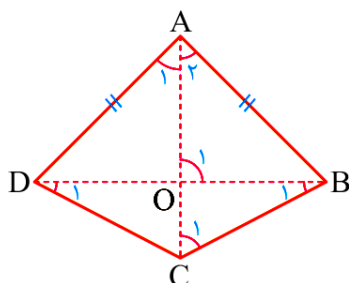
(۱) $BA > BD$

(۲) $DA > DB$

(۳) $AB > AD$

(۴) $BD > DA$

تست: در چهار ضلعی $ABCD$ داریم $AB = AD$ و $BC > CD$ ، در مورد زاویه‌ها کدام نتیجه نادرست است؟

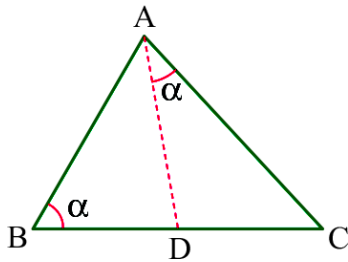


(۱) $\hat{C}_1 > \hat{A}_1$

(۲) $\hat{D}_1 > \hat{B}_1$

(۳) $\hat{D} > \hat{B}$

(۴) $\hat{O}_1 > \hat{A}_1$



تست: در مثلث ABC مطابق شکل، کدام گزینه قطعاً درست است؟

(۱) $AC < DC$

(۲) $AB < AC$

(۳) $AD > AB$

(۴) $AB > AD$

تست: در مثلث ABC زاویه $\hat{A} > \hat{C}$ ، نیمساز زاویه B و عمود منصف ضلع AB در نقطه D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطه D به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟

(۱) $NC > NB$

(۲) $NC < NB$

(۳) $DA > DC$

(۴) $AM < BM$

استدلال استقرایی

✓ استدلال استقرایی بر اساس مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت خاص است و به اصطلاح «از جزء به کل» می‌رسد.

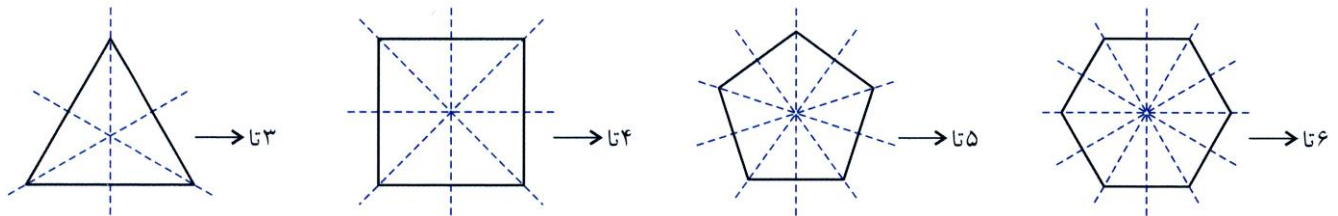
✓ در استدلال استقرایی نمی‌توان همواره به نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

مثلاً اگر فردی با مشاهده پنج مسافر آمریکایی که اضافه وزن دارند، نتیجه‌گیری کند که همه آمریکایی‌ها اضافه وزن دارند، از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

مثال: به روش استدلال استقرایی نشان دهید که یک n ضلعی منتظم، n تا محور تقارن دارد.

حل:

تعداد محورهای تقارن مثلث متساوی الاضلاع، مربع، پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم را بررسی می‌کنیم:

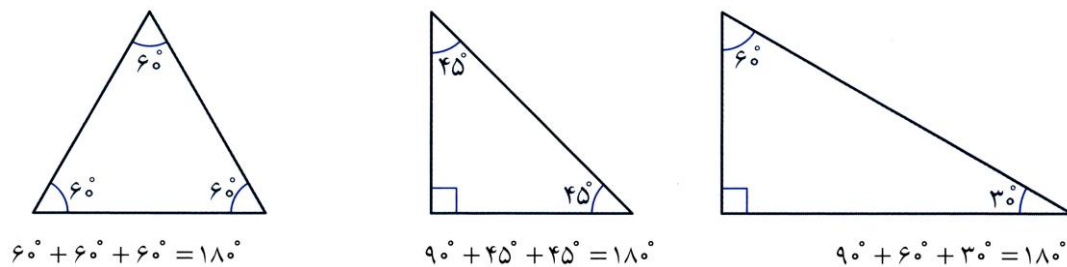


حکم مسأله را در چهار حالت بررسی کردیم و درست بود. با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که یک n ضلعی منتظم به تعداد n تا محور تقارن دارد.

مثال: به روش استقرایی نشان دهید که مجموع زاویه‌های یک مثلث، 180° درجه است.

حل:

سه مثلث زیر را در نظر می‌گیریم:



با توجه به سه مثلث بالا، با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که مجموع زوایای همه مثلث‌ها 180° درجه است.

استدلال استنتاجی 🤔

✓ استدلال استنتاجی براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایق است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. مثلاً اگر فردی در جایی باشد که باران بیارد و نتیجه‌گیری کند که در آسمان ابر وجود دارد، از استدلال استنتاجی استفاده کرده است.

گزاره و نقیض گزاره 🤔

😊 **گزاره:** یک جمله خبری است که یا دقیقاً درست است یا دقیقاً نادرست (البته ممکن است درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد). در یک گزاره ساده، یک خبر اعلام می‌شود و در یک گزاره مرکب بیش از یک خبر اعلام می‌شود. 😊 **نقیض گزاره:** یک گزاره است که مخالف آن گزاره را اعلام می‌دارد. مثلاً عبارت «مثلث ABC متساوی‌الساقین است» یک گزاره است و نقیض آن عبارت‌های «مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست» یا «در مثلث ABC، طول هیچ دو ضلعی با هم برابر نیست» است.

🧐 **مثال:** نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید:

الف) برق خانه وصل است.

ب) مجید قد بلندترین دانش‌آموز کلاس است.

ج) $a > b$.

د) در مثلث ABC، رابطه $AB > AC$ برقرار است.

هـ) عدد حقیقی a ، گویا است.

و) هر مستطیلی یک مربع است.

ز) هر ۶ لامپ خانه روشن هستند.

✍️ **حل:**

الف) «برق خانه وصل نیست» یا «برق خانه قطع است».

ب) «مجید قد بلندترین دانش‌آموز کلاس نیست» یا «حداقل یک نفر در کلاس از مجید قد بلندتر است».

ج) $b \geq a$.

د) «در مثلث یا رابطه $AC = AB$ برقرار است یا رابطه $AC > AB$ ».

هـ) «عدد حقیقی a ، گویا نیست» یا «عدد حقیقی a ، گنگ است».

و) «همه مستطیل‌ها مربع نیستند».

ز) «حداقل یکی از ۶ لامپ خانه روشن نیست» یا «حداکثر ۵ تا از لامپ‌های خانه روشن هستند».

🧐 **مثال:** نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید. (قدربین کتاب درسی)

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعي محدب برابر 360° است.

🧐 **برهان خلف (غیر مستقیم)**

اگر بخواهیم یک قضیه (که فرض و حکم دارد) را با برهان غیرمستقیم (برهان خلف) اثبات کنیم:

✅ فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

✅ نقیض حکم را به عنوان فرض می‌پذیریم.

✅ به یک تناقض یا به یک امر غیر ممکن می‌رسیم.

✅ پس نقیض حکم نادرست است و خود حکم درست است.

🧐 **مثال:** دو خط d_1 و d_2 بر خط l عمود هستند. ثابت کنید d_1 و d_2 موازی هستند.

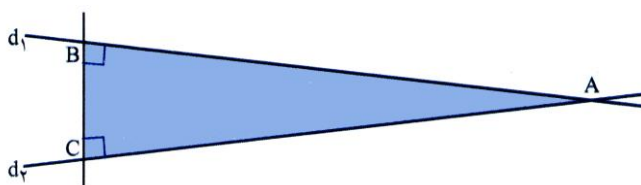
✍️ **حل:**

ابتدا فرض و حکم را می‌نویسیم:

فرض: $d_1 \perp l$, $d_2 \perp l$

حکم: $d_1 \parallel d_2$

با برهان غیرمستقیم (برهان خلف) فرض می‌کنیم حکم غلط باشد، یعنی d_1 و d_2 موازی نیستند، یعنی d_1 و d_2 متقاطع هستند، فرض می‌کنیم این دو خط در نقطه A متقاطع باشند، اکنون در مثلث ABC دو زاویه قائمه داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 0^\circ$$

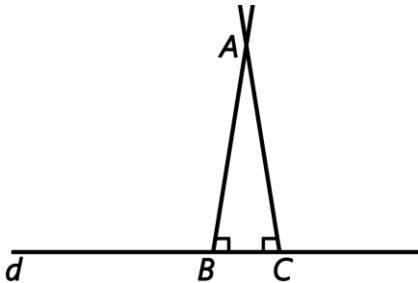
می‌دانیم $\hat{A} = 0^\circ$ (با توجه به شکل) غیرممکن است. پس فرض متقاطع بودن d_1 و d_2 نادرست است، در نتیجه d_1 و d_2 موازی هستند.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد. (کتاب درسی)

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.



مثال: می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. (قدیرین کتاب درسی)

مثال: با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$. (قدیرین کتاب درسی)

قضیه‌های شرطی

عکس قضیه

✓ اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود.

✓ عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد. مثلاً:

قضیه: اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، آنگاه ارتفاع و میانه وارد بر آن بر هم منطبق هستند.

عکس قضیه: اگر در یک مثلث ارتفاع و میانه وارد بر یک ضلع منطبق باشند، آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

مثال: عکس قضیه‌های زیر را بنویسید:

الف) اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهایش عمود منصف یکدیگر هستند.

ب) اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه میانه‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابر هستند.

ج) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه دو محور تقارن دارد.

حل:

الف) اگر در یک چهارضلعی قطرها عمود منصف یکدیگر باشند، آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.

ب) اگر در یک مثلث میانه‌های وارد بر دو ضلع با هم برابر باشند، آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

ج) اگر یک چهارضلعی دو محور تقارن داشته باشد، آنگاه آن چهارضلعی مستطیل است.

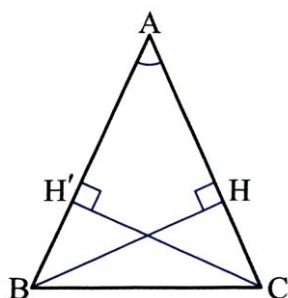
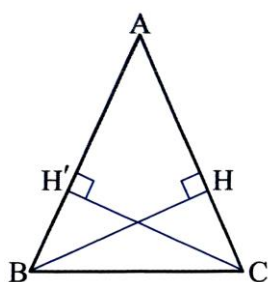
نکته: اگر یک قضیه و عکس آن قضیه درست باشد، آن قضیه دوشرطی است.

مثال: آیا قضیه زیر دوشرطی است؟

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

حل:

ابتدا درستی خود قضیه را بررسی می‌کنیم:

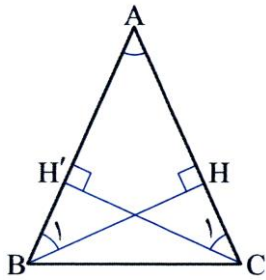


فرض : $AB = AC$

حکم : $BH = CH'$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{و.ز} \Delta ABH \cong \Delta ACH' \Rightarrow BH = CH'$$

پس خود قضیه درست است. اکنون عکس قضیه را می‌نویسیم.



عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض : $BH = CH'$

حکم : $AB = AC$

ثابت می‌کنیم عکس قضیه هم درست است.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABH: \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{H} = 180^\circ \\ \triangle ACH': \hat{A} + \hat{C}_1 + \hat{H}' = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ BH = CH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle ABH \cong \triangle ACH' \Rightarrow AB = AC$$

چون هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است، قضیه دوشرطی است.

مثال: عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید. (قرین کتاب درسی)

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

مثال نقض

اگر گاهی در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم کلی بیان می‌شود. اگر بتوان یک مثال (یکی از اعضای آن مجموعه) پیدا کنیم که آن حکم را رد کند، یک مثال نقض پیدا کرده‌ایم، بنابراین آن حکم در مورد آن مجموعه نادرست است.

مثال: نادرستی حکم‌های زیر را با مثال نقض نشان دهید:

الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود.

ب) هیچ دوزنقه‌ای محور تقارن ندارد.

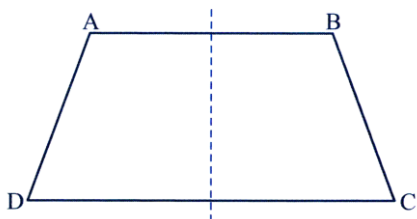
ج) در هر چهارضلعی، قطرهای همدیگر را قطع می‌کنند.

د) نمی‌توان پنج عدد طبیعی متوالی پیدا کرد که همگی مرکب باشد.

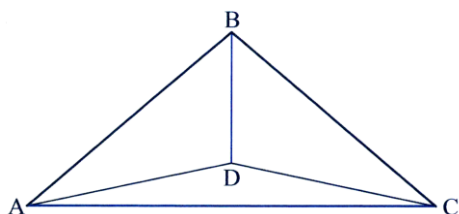
حل: الف) می‌توان دو عدد گنگ پیدا کرد که حاصل ضربشان گویا شود:

ب) دوزنقه متساوی الساقین محور تقارن دارد:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$



ج) در چهارضلعی مقعر (کاو) قطرهای همدیگر را قطع نمی‌کنند.



د) پنج عدد ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵ و ۳۶ متوالی هستند و همگی مرکب هستند.

مثال: مثال شکل روبه‌رو یک هفت ضلعی منتظم است. آیا حکم‌های کلی زیر درست هستند؟

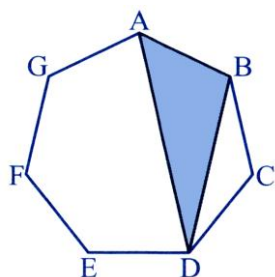
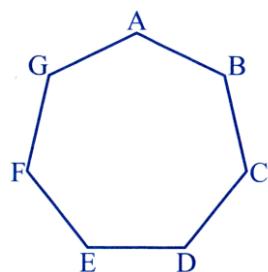
الف) با وصل کردن هر سه رأس از این شکل، یک مثلث متساوی الساقین حاصل می‌شود.

ب) با وصل هر چهار رأس از این شکل، یک چهارضلعی حاصل می‌شود که محور تقارن دارد.

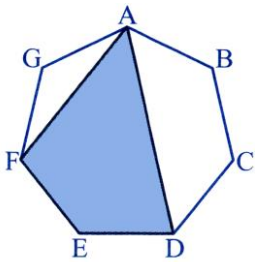
حل:

هر دو حکم نادرست هستند و برای هر کدام یک مثال نقض ارائه می‌دهیم:

الف) مثلث ABD متساوی الساقین نیست.



(ب) چهار ضلعی ADEF محور تقارن ندارد.



🧐 **مثال:** گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید. (تدریس کتاب درسی)

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

🧐 **مثال:** نقیض هریک از گزاره‌های زیر را بنویسید. (تدریس کتاب درسی)

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد.

ت) همه فلزات جامدند.

