



ویژه
تیزهوشان

جزوه جامع و کامل

ریاضی IQ

نهم



مolf :

استاد سما حسنی بصیر



پوشش جامع صفر تا صد مباحث تیزهوشان



آموزش نکات تکمیلی و مباحث خارج از کتاب



پوشش تست‌های تیزهوشان، مدارس نمونه و برتر



تیپ‌بندی و دسته‌بندی انواع تست‌ها



ارائه‌ی نکات و تکنیک‌های تستی ویژه



تلگرام و روبیکا
SamaBasir



اینستا و آپارات
samabasir.riazi



بله
samabasir



معرفی مجموعه

← من، مقلی، کبری و ... ← یک برداشت ← مجموعه

تألیفی

۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر بیانگر مجموعه هستند؟

الف) سیارات منظومه شمسی ✓

ب) خانم‌های لاغر ✗

ج) خانم‌های با وزن کمتر از ۵۰ ✓

د) درختان شهر تهران ✓

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

عضویت در مجموعه

$A = \{m, n, d, \{a, b\}\}$

$A = \{a, b, c\} \rightarrow n(A) = 3$

$A = \{\{\}$

اعضو

۲- اگر $A = \{\{\}, \{1, 2\}\}$ و $B = \{\{1, 2\}, \{\}\}$ آن گاه کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

$\{1, 2\} \in A$ (۴) ✓ $\{\{\}\} \in A$ (۳) $1 \in B$ ✗ $1 \in A$ ✗ $\{1, 2\} \in A$ ✓

۳- اگر تعداد اعضای دو مجموعه‌ی $A = \{\{\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ را با نمادهای $n(A)$ و $n(B)$ نشان دهیم، $n(A) - n(B)$ برابر با کدام گزینه است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تألیفی

۴- اگر مجموعه‌ی $\{1, 2, 0, m, -1\}$ دارای ۳ عضو باشد m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو مجموعه

برای پیدا کردن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو یک مجموعه، آن را با اعضا نمایش می‌دهیم. البته ممکن است بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو یا هر دوی آن‌ها وجود نداشته باشند که در این صورت تعداد عضوهای مجموعه بی‌شمار است.

نمونه دولتی مازندران

۵- بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A = \{-(x-1)^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

۶۳ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

نامشخص (۴)

$-(x-1)^2 + 1$

۰، -۳، -۸، ...

$$A = \{ \dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$$



فصل اول: مجموعه‌ها

سما حسنی بصیر

انواع نمایش مجموعه

- آکولاد
- فارسی
- نقطه و دو نقطه
- زبان ریاضی

تفسیر

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ (۲ و ۳)

$A = \{0, 1, 2\}$

المپیاد ریاضی

$\{2, 4, 6\}$

۶- مجموعه‌ی $B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a = 3b, b \neq 0 \right\}$ در کدام گزینه است؟

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

(۳) $\{3\}$

(۲) $\{\dots, -2, +2, \dots\}$

(۱) $\{\dots, -6, -3, \dots\}$

المپیاد ریاضی

۷- نمایش ریاضی مجموعه‌ی $A = \{-1, -3, -5, -7, \dots\}$ در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟

$(-1)^1 \times 1 = -1$

$(-1)^2 \times 2 = 2$

$(-1)^3 \times 3 = -3$

$(-1)^4 \times 4 = 4$

$A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$A = \{(-1) \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$A = \{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۴) $A = \{(-n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

گاهی در نمایش مجموعه به زبان ریاضی، نیازمند حل معادله و یا استفاده از مجموعه‌های دیگر خواهیم شد.

۸- اگر $A = \{-x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{-x^3 \mid x \in A\}$ باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعه‌ی B را نشان می‌دهد؟

آزمون تیزهوشان

(۴) $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

(۳) $\{-1, 0, 27\}$

(۲) $\{-3, 0, 1\}$

(۱) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

آزمون تیزهوشان

۹- مجموعه‌ی $A = \{x - y \mid x - 1 = 3y\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۴) $\{-5, 5\}$

(۳) $\{2\}$

(۲) $\{32\}$

(۱) $\{16\}$

مجموعه تهی

$\{ \} = \emptyset$

۱۰- کدام گزینه با مجموعه $\{ \}$ برابر است؟

(۲) اعداد اول زوج

(۱) اعداد طبیعی که نه زوج هستند و نه فرد

(۴) اعدادی که مربع‌شان با خودشان برابر باشد.

(۳) اعداد اول بین ۱۷ و ۲۵

۱۱- اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ باشد، چه تعداد از عبارتهای مقابل صحیح است؟

$\{\emptyset\} \in B, \{\emptyset\} \notin A, \{\emptyset\} \in A, \emptyset \in A$

(۴) هیچ کدام

(۳) سه عبارت

(۲) دو عبارت

(۱) یک عبارت



زیر مجموعه و تعداد زیر مجموعه

کنکور

۱۲- تعداد زیر مجموعه‌ی $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۱۶ (۲)

۴ (۱)

اگر $A \subseteq B$ (تعداد عضوهای A کمتر یا مساوی تعداد عضوهای B است).



اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد، آن گاه $A \subseteq C$.



$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \subseteq C$$



۱۳- اگر A, B و C سه مجموعه باشند که $n(A) < n(B)$ و $B \subseteq C$ باشد، آن گاه:

$n(A) < n(C)$ (۴)

$n(B) < n(C)$ (۳)

$A \subseteq C$ (۲)

$A \subseteq B$ (۱)

۱۴- مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی شش عضوی است که جمع عضوهای آن ۴۰ است. همه‌ی زیرمجموعه‌های A را در نظر بگیرید

و حاصل جمع اعضای هر کدام را روی تخته سیاه یادداشت کنید. جمع اعداد یادداشت شده چند خواهد شد؟ (آزمون تیزهوشان)

۳۱۰۰ (۴)

۲۵۶۰ (۳)

۱۲۸۰ (۲)

۱۱۰۰ (۱)

مجموعه‌ی توانی



مجموعه‌ای مانند A را در نظر بگیرید، به مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A ، مجموعه‌ی توانی A می‌گوییم و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

۱۵- اگر $A = \{b, \{b\}\}$ باشد، $P(A)$ کدام است؟

$\{\{b\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset\}, A\}$ (۴)

$\{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset, A\}$ (۳)

$\{b, \{b\}, \emptyset, A\}$ (۲)

$\{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset\}$ (۱)

زیرمجموعه‌های محض (سره):



به همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خودش، زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌گوییم؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های محض

یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $2^n - 1$ است.

تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی



تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی، از فرمول مقابل سریع و راحت به دست می‌آید:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$





تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی یک مجموعه‌ی ۹ عضوی:



$$\frac{n!}{m!(n-m)!} \xrightarrow[n=9]{m=6} \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6! \times 3!}$$

$$\frac{\cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}$$

فکتوریل:



حاصل ضرب اعداد طبیعی از یک تا n را با n! نمایش می‌دهیم و آن را n فکتوریل می‌خوانیم.

۵! به معنای حاصل ضرب اعداد طبیعی ۱ تا ۵ است.



$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

به طور کلی برای عدد طبیعی n داریم:

معادل n! را می‌توانیم به صورت ناقص نیز بنویسیم. برای این کار معادل را تا عددی دلخواه می‌نویسیم و در آخر یک علامت



فکتوریل قرار می‌دهیم.

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$$

برای ۱۰! داریم:



در هر مجموعه‌ی n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های (n-m) عضوی با هم برابر هستند.



تعداد زیرمجموعه‌های ۲ و ۳ عضوی یک مجموعه‌ی ۵ عضوی با هم برابر هستند.

۱۶- مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ چند زیرمجموعه‌ی حداقل دو عضوی دارد؟

$$2^{15} - 2^0 \quad (۴)$$

$$2^{15} - 16 \quad (۳)$$

$$2^{15} - 30 \quad (۲)$$

$$2^{15} - 15 \quad (۱)$$

۱۷- اگر مجموعه‌ای دارای ۴۵ زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی ۹ عضوی دارد؟

$$2^9 \quad (۴)$$

$$9 \quad (۳)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که عضوی خاص در آن‌ها آمده یا نیامده باشد:



در هر دو صورت، عضوهای گفته شده را کنار می‌گذاریم و تعداد زیرمجموعه‌ها با بقیه‌ی اعضا را حساب می‌کنیم.

توجه: تکلیف این که عضوهای مدنظر نیامده باشند که معلوم است؛ با حذف آن‌ها کلاً انگار وجود نداشتند، پس حتماً در زیر



مجموعه‌ها نخواهند آمد، اما در حالت دیگر عملاً اعضا را موقت کنار گذاشته‌ایم و در آخر آن‌ها را به تمام زیرمجموعه‌ها اضافه می‌کنیم.

۱۸- چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ داریم که ۳ و ۵ در آن‌ها نباشند ولی ۲ حتماً عضو آن‌ها باشد؟

$$64 \quad (۴)$$

$$32 \quad (۳)$$

$$128 \quad (۲)$$

$$256 \quad (۱)$$





۱۹- مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۶، چند زیرمجموعه دارد که اعضای آن عدد اول باشند؟

روبوکاپ

- ۱۶ (۱) ۱۵ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

گاهی در تست‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های خاصی پرسیده می‌شود که نیاز به خلاقیت و بررسی دقیق دارد.



۲۰- مجموعه‌ی $\{۳, ۶, ۹, \dots, ۲۴\}$ چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد که بزرگ‌ترین عضو آن ۱۵ باشد؟

نمونه دولتی کرمان

- ۶ (۱) ۱۶ (۲) ۲۱ (۳) ۳۵ (۴)

تعداد زیرمجموعه و حل معادله در تست‌های مربوط به تعداد زیرمجموعه، گاهی مجبور به حل معادلات خواهیم شد.



۲۱- مجموع تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی و $(k+1)$ عضوی، ۴۸ است. k چه عددی است؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) نمونه دولتی ایلام و مرکزی

۲۲- اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $(n+1)$ عضوی، ۸ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $(n-2)$ عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی چقدر است؟

المپیاد ریاضی

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

مجموعه‌های برابر

۲۳- دو مجموعه‌ی $\{-1\}$ و $\{m-n, n^3\}$ برابرند. حاصل mn چیست؟

نمونه دولتی تهران

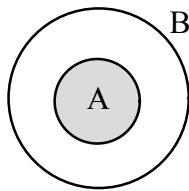
- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۲۴- به ازای چند مقدار از x ، دو مجموعه‌ی $A = \{1, x, x^2\}$ و $B = \{y, y^2\}$ می‌توانند برابر شوند؟

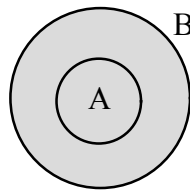
آزمون تیزهوشان

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۳ (۴)

اشتراک، اجتماع و تفاضل مجموعه‌ها



$$A \cap B = A$$



$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A \cup B = A = B$$

$$A - B = A, \quad B - A = B$$

$$(A - B) \subseteq A, \quad (B - A) \subseteq B$$

$$A - A = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A, \quad \emptyset - A = \emptyset$$

اگر $n(A) \leq n(B)$ باشد، حتماً نمی‌توان گفت که $A - B$ برابر $\emptyset$ است.

اگر $n(A) > n(B)$ باشد، آن‌گاه هیچ‌گاه $A - B$ برابر $\emptyset$ نمی‌شود.

روابط تکمیلی مجموعه‌ها:

$$A, B \subseteq (A \cup B)$$

$$(A \cap B) \subseteq A, B$$

$$A \subseteq B \rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$A \subseteq B \rightarrow A - B = \emptyset$$

اگر $A = B$ باشد، آن‌گاه

در رابطه با تفاضل مجموعه‌ها داریم:

اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه:

همواره داریم:

تفاضل هر مجموعه و خودش تهی است.

درباره‌ی تفاضل تهی و مجموعه‌ی دلخواه A داریم:

قوانین مجموعه‌ها

قانون شرکت‌پذیری



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

قانون توزیع‌پذیری



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

قانون دمورگان



$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

قانون جذب



$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$





تعمیم اجتماع و اشتراک:



$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

۲۵- اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 8-i\}$ باشد، مجموعه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ چند عضو دارد؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

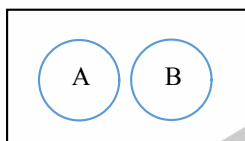
۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

مجموعه‌های جدا از هم:

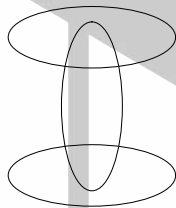


دو مجموعه‌ای که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، مجموعه‌های جدا از هم یا مجزا می‌گویند.



$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A, B - A = B$$

اگر داشته باشیم $A \cap B \cap C = \emptyset$ لزوماً این سه مجموعه جدا از هم نیستند.



تیپ محاسباتی



۲۶- اگر $\{7, 5, 3, y\} \cap \{8, 5, x, 2, 10\} = \{5, 7, 2\}$ باشد، آن‌گاه $x + y$ چند است؟

۱۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

۲۷- اگر $A_i = \{x \mid -i < x < i, x \in \mathbb{N}\}$ باشد، $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n$ کدام است؟

 $A_1 - A_n$ (۴) $A_n - A_1$ (۳) A_n (۲) A_1 (۱)

۲۸- اگر $(A \cup B) \subseteq \emptyset$ باشد، کدام درست است؟

 $A \neq \emptyset$ یا $B = \emptyset$ (۲) $A \neq \emptyset$ یا $B \neq \emptyset$ (۱) $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$ (۴) $A \neq \emptyset$ و $B = \emptyset$ (۳)

۲۹- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 4\}$ ، $B \subseteq A$ و $n(B) = 4$ باشد، در آن صورت $n(A - B)$ کدام است؟

نمونه دولتی فراسان رضوی

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)





تیپ جبر



نمونه دولتی تهران

۳۰- اگر $A \subseteq B$ باشد، حاصل $[(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)]$ کدام است؟

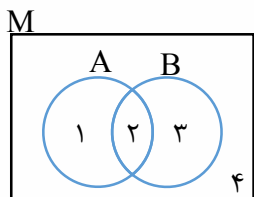
∅ (۴)

 $B - A$ (۳) B (۲) A (۱)

روش شماره‌گذاری

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند. در این روش ابتدا با استفاده از نمودار ون، A و B را نمایش داده و به هر کدام از نواحی

مجزا یک شماره نسبت می‌دهیم. سپس می‌توانیم نواحی مختلف را با بیان شماره‌هایشان معرفی کنیم. به عنوان مثال با توجه به شکل



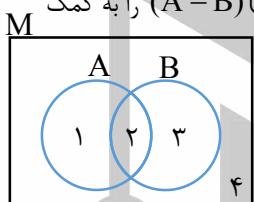
مقابل چند مجموعه‌ی زیر را به کمک اعداد می‌نویسیم:

$$\Rightarrow A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, A \cap B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2, 3\}, (A \cup B)' = \{4\}$$

برای درک کاربرد این روش به مثال‌های زیر دقت کنید:

مجموعه‌ی $(A - B) \cup B$ برابر کدام گزینه است؟ $A \cup B$ (۴) $A \cap B$ (۳) B (۲) A (۱)

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

ابتدا یک نمودار ون با مجموعه‌های A و B در حالت کلی رسم می‌کنیم. سپس با توجه به نمودار ون، حاصل $(A - B) \cup B$ را به کمک

اعداد بیان می‌کنیم:

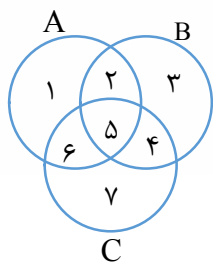
$$\Rightarrow (A - B) \cup B = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) \cup \{2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

حال اگر به نمودار ون نگاه کنیم، مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ ، همان مجموعه $A \cup B$ است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.اگر $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ $C \subseteq A$ (۴) $A \subseteq C$ (۳) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq C$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

با توجه به نمودار ون، نواحی مجزا را شماره‌گذاری کرده و سپس مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ و $A \cup (B \cap C)$ را به کمک اعداد

بیان می‌کنیم:



$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6\} (*)$$

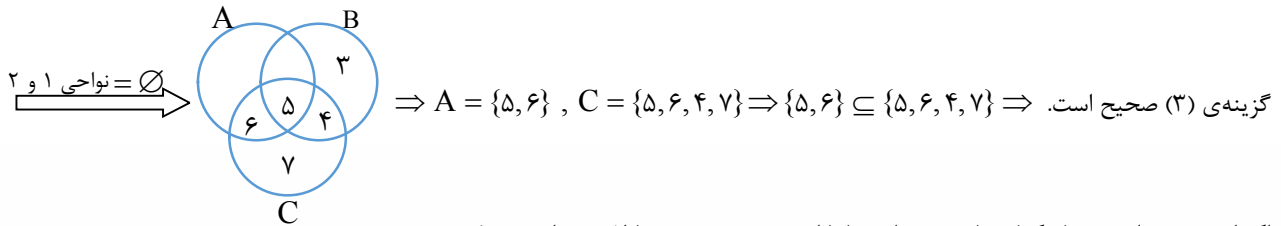
$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 5, 6\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 4, 5, 6\} (**)$$

$$\{4, 5, 6\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

از طرفی با توجه به فرض تست، دو مجموعه‌ی $(*)$ و $(**)$ با هم مساوی‌اند. پس داریم:



برای برقراری تساوی فوق اعداد ۱ و ۲ در مجموعه‌ی سمت راست نباید وجود داشته باشند. پس در نواحی ۱ و ۲ نباید عضوی وجود داشته باشد. بنابراین نمودار ون به صورت زیر در می‌آید و با توجه به آن مشخص است که $A \subseteq C$ است. زیرا:



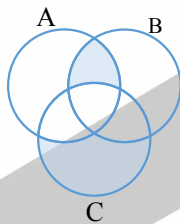
اگر این روش را خوب یاد گرفته باشید، خیلی جاها از سخت‌ترین تست‌ها لذت خواهید برد!

تیپ نمودار ون



۳۱- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 5\}$ و $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 3\}$ ، حاصل جمع اعدادی

نمونه دولتی یزد



که عضو نواحی رنگی هستند، کدام است؟

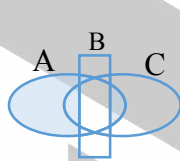
۶ (۲)

۵ (۱)

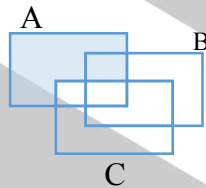
۸ (۴)

۷ (۳)

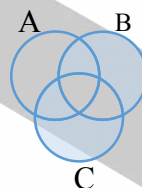
۳۲- کدام نمودار، عبارت $(A - B) \cup (A - C)$ را نشان می‌دهد؟



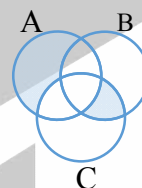
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

تیپ مسئله



۳۳- در یک کلاس ۳۰ نفره، همه‌ی افراد به فوتبال و بسکتبال علاقه دارند، فوتبال ورزش مورد علاقه ۱۸ نفر و بسکتبال ورزش

تألیفی

مورد علاقه‌ی ۲۶ نفر می‌باشد. در این کلاس چند نفر هم به فوتبال و هم به بسکتبال علاقه‌مند هستند؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

مجموعه مرجع و متمم



به مجموعه‌ای که همه‌ی اعضا یا مجموعه‌های مورد بحث ما را شامل شود، مجموعه‌ی مرجع یا جهانی می‌گوییم.

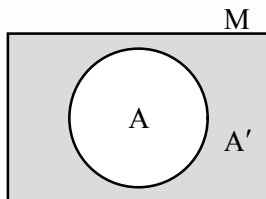
مجموعه مرجع را معمولاً با M یا U نشان می‌دهند.

متمم یک مجموعه:



متمم مجموعه‌ی A را با A' نمایش می‌دهیم که شامل تمام عضوهای M است که در A قرار ندارند.

$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$





اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ ، آن گاه $A' = \{2, 4, 6, 10\}$ است.



روابط مهم مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه:

متمم مجموعه مرجع، برابر مجموعه تهی و متمم مجموعه تهی، برابر مجموعه مرجع است.



$$M' = \emptyset \quad \emptyset' = M$$

$$(A')' = A$$

متمم متمم هر مجموعه برابر با خودش است.



$$A \cap A' = \emptyset \quad A \cup A' = M$$

برای هر مجموعه دلخواه مثل A و متمم آن (A') داریم:



$$M - A = A' \quad M - A' = A$$

چون $A \cup A' = M$ پس:



$$A - A' = A \quad A' - A = A'$$

تفاضل مجموعه دلخواه A و متمم آن برابر است با:



$$A - B = A \cap B'$$

تبدیل تفاضل به اشتراک:



۳۴- اگر A مجموعه دانش آموزانی باشد که نمره‌ی آن‌ها حداقل ۱۷ است و B مجموعه دانش آموزانی باشد که نمره‌ی آن‌ها

آزمون تیزهوشان

حداکثر ۱۵ است؛ در این صورت $A \cup B'$ کدام است؟

(۱) مجموعه دانش آموزانی که نمره‌ی آن‌ها حداقل ۱۷ است.

(۲) مجموعه دانش آموزانی که نمره‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۵ است.

(۳) مجموعه دانش آموزانی که نمره‌ی آن‌ها ۱۵ یا کمتر از ۱۵ است.

(۴) مجموعه همه‌ی دانش آموزان کلاس

۳۵- اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$ دو زیرمجموعه از S باشند، حاصل

$(A \cap B')' \cup (A \cap B)$ کدام است؟

(۴) $\{3\}$

(۳) $\{3, 4\}$

(۲) $\{1, 2, 4\}$

(۱) $\{1, 2, 3, 4\}$

۳۶- اگر A مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۳، B مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ و $x \in (A' \cup B)'$ باشد، کدام حکم درست

آزمون تیزهوشان

است؟

(۲) x بر ۵ بخش پذیر و بر ۳ بخش پذیر نیست.

(۱) x بر ۳ و ۵ بخش پذیر است.

(۴) x بر ۳ بخش پذیر است و بر ۵ بخش پذیر نیست.

(۳) x نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی



مجموعه متناهی (با پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضا آن، یک عدد حسابی باشد.

مجموعه نامتناهی (بی پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضا آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضا آن از هر عددی

که در نظر بگیریم بزرگتر باشد.





اگر A متناهی باشد و $B \subseteq A$ باشد، آن گاه B نیز متناهی است.



نکته

اگر B نامتناهی باشد و $B \subseteq A$ ، آن گاه A نیز نامتناهی است.



نکته

اگر مجموعه‌ی مرجع نامتناهی باشد، آن گاه متمم هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن حتماً نامتناهی است ولی متمم هر



نکته

زیرمجموعه‌ی نامتناهی از آن ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

درباره‌ی اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌های متناهی و نامتناهی می‌توان گفت:



نکته

نامتناهی = نامتناهی $\cup$ متناهی	متناهی = متناهی $\cap$ نامتناهی
نامتناهی = نامتناهی $\cup$ نامتناهی	متناهی = نامتناهی - متناهی

۳۷- کدام جمله همواره درست است؟

(۱) همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی متناهی، متناهی‌اند.

(۲) هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

(۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

(۴) اگر $A \subseteq B$ و A متناهی باشد، B نیز متناهی است.

۳۸- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول باشند، کدام مجموعه، با پایان (متناهی) و غیرتهی است؟

(۴) $A - (A \cup B)$

(۳) $A \cap B$

(۲) $B - A$

(۱) $A - B$

بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل ریاضی



اگر عملی ریاضی را روی هر دو عضو دلخواه (حتی تکراری) مجموعه‌ای مانند A انجام دهیم و حاصل عضوی از A باشد، آن گاه A نسبت به آن عمل بسته است.

۳۹- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته است.

(۲) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج نسبت به عمل ضرب بسته است.

(۳) مجموعه $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

(۴) مجموعه $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل جمع بسته است.

مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع و ضرب بسته است.



نکته

مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل جمع و ضرب بسته است.



نکته





برای مجموعه اعداد گویا و گنگ داریم:



* اگر a و b عددهایی گویا باشند، آنگاه $a + b$ ، $a - b$ ، ab ، $\frac{a}{b}$ (به شرطی که $b \neq 0$) هم عددهایی گویا هستند. (مجموعه اعداد گویا

نسبت به چهار عمل اصلی بسته است)

* اگر a و b عددهایی گنگ باشند، راجب گنگ یا گویا بودن چهار عمل اصلی روی آن‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد. (مجموعه اعداد گنگ

نسبت به هیچ عملی بسته نیست)

۴۰- مجموعه‌ی A به صورت $A = \{n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ تعریف شده است. کدام گزینه در مورد مجموعه‌ی A درست است؟

(۱) نسبت به عمل جمع بسته است ولی نسبت به عمل ضرب بسته نیست.

(۲) نسبت به عمل جمع بسته نیست ولی نسبت به عمل ضرب بسته است.

(۳) نسبت به هر دو عمل بسته است (ضرب و جمع).

(۴) نسبت به هر دو عمل بسته نیست (ضرب و جمع)

اصل شمول یا عدم شمول (تعداد اعضای مجموعه)



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

توجه: از تساوی بالا در سؤالات زیادی استفاده خواهیم کرد.



تیپ محاسباتی



۴۱- اگر $n(A) = n(B) + 2 = 8$ ، آنگاه حاصل $n(A \cup B) - n(A \cap B)$ کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۴۲- اگر $n(A \cup B) = ۱۰$ ، $n(A \cap B) = ۴$ و $n(A) < n(B)$ باشد، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه‌ی B کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

تیپ مسئله



۴۳- در یک کلاس ۴۰ نفری، دانش‌آموزان حداقل یکی از زبان‌های فرانسه یا انگلیسی را می‌دانند. تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند ۲ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که زبان فرانسه را می‌دانند و همچنین ۴ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که هر دو زبان را می‌دانند. بر این اساس تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند، چند نفر است؟

نمونه دولتی آذربایجان غربی و اردبیل

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲





احتمال و انواع فضای نمونه

تیپ تعداد حالت‌های فضای نمونه



۴۴- به چند طریق می‌توان از بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۲ عدد انتخاب کرد که مجموع آن‌ها زوج باشد؟

انرژی اتمی

۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴)

تعداد حالت‌هایی که بتوانیم چندین شی را کنار هم بچینیم به راحتی به کمک فاکتوریل قابل محاسبه می‌باشد.



مثال: تعداد حالت چیدمان n شی کنار هم برابر است با:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots$$

۴۵- ۵ گلدان متفاوت داریم. می‌خواهیم گلدان‌ها را در یک پنجره به دنبال هم قرار دهیم به طوری که گلدان گل بنفشه با

انرژی اتمی

گلدان گل لاله کنار هم قرار نگیرند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۷۲ (۱) ۶۸ (۲) ۵۷ (۳) ۴۷ (۴)

تیپ تاس و سکه



۴۶- در پرتاب دو تاس، احتمال آن که حاصل ضرب ۲ عددی که تاس‌ها نشان می‌دهند، عددی فرد باشد، کدام است؟

آزمون تیزهوشان

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴)

۴۷- دو تاس ۶ وجهی و دو سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که یک تاس زوج، یک تاس فرد و سکه‌ها

متفاوت ظاهر شوند؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

گاهی شمارش حالت‌های مطلوب بسیار زمان‌بر و حتی پیچیده است. در این مواقع به سراغ متمم آن می‌رویم یعنی تعداد



حالت‌هایی که نمی‌خواهیم را می‌شماریم و سپس با کم کردن از کل حالت‌ها، تعداد حالت‌های مطلوب به راحتی به دست می‌آید یا این که

احتمال متمم را به دست می‌آوریم و عدد حاصل را از یک کم می‌کنیم، عدد نهایی همان احتمال مطلوب ماست.

۴۸- تعداد ۴ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟

نمونه دولتی تهران

$\frac{12}{16}$ (۱) $\frac{13}{16}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴)





تیپ تعداد فرزندان



۴۹- در خانواده‌ی ۶ فرزندی، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها پسر هستند. احتمال آن که این خانواده ۳ پسر داشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{3}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{160} \quad (۱)$$

نکته وجود شرط در سوال، باعث کاهش فضای نمونه می‌شود.



۵۰- با چه احتمالی خانمی که سه فرزند دارد، بیش از یک دختر خواهد داشت، به شرطی که بدانیم او حداقل یک دختر دارد؟

$$\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

تیپ مهره و کیسه



برگشت‌پذیر بودن یا برگشت‌ناپذیر بودن مهره‌ها در کیسه اهمیت زیادی دارد. در صورت برگشت‌پذیر بودن، اعضا فضای نمونه در تمام مراحل یکسان است اما در صورتی که مهره‌ها به کیسه برنگردند، اعضا فضای نمونه در هر مرحله کاهش می‌یابد.



۵۱- ظرفی حاوی پنج مهره‌ی آبی و چهار مهره‌ی قرمز است. دو مهره به تصادف و بدون برگشت، از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال این که مهره‌ی اول قرمز و مهره‌ی دوم آبی باشد، برابر کدام گزینه است؟

نمونه دولتی کرمان

$$\frac{5}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{20}{81} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{20} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

۵۲- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف ۱ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این مهره‌ها متفاوت است؟

$$\frac{27}{40} \quad (۴)$$

$$\frac{23}{40} \quad (۳)$$

$$\frac{21}{40} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{40} \quad (۱)$$

تیپ ساخت رقم



۵۳- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به طور تصادفی عددی پنج رقمی بدون تکرار ارقام نوشته‌ایم. احتمال آن که آن عدد بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

المپیاد ریاضی بلژیک، فرانسه و هلند

$$60\% \quad (۴)$$

$$40\% \quad (۳)$$

$$33\% / 33 \quad (۲)$$

$$16\% / 66 \quad (۱)$$





تیپ فضای نمونه پیوسته



۵۴- اتفاقی داریم که کف آن از کاشی‌های مربع شکل پوشیده شده است. طول اتاق شامل ۸ و عرض شامل ۵ کاشی است. اگر یکی از کاشی‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن که این کاشی، کاشی کنج یا کناره‌های اتاق باشد، چه قدر است؟

المپیاد ریاضی

$$\frac{19}{40} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{21}{40} \quad (۳) \quad \frac{11}{20} \quad (۴)$$

ترکیب مجموعه و احتمال



مجموعه	یعنی	نمودار ون	مثال
$A \cap B$	هم A و هم B رخ دهد.		در پرتاب یک تاس عددی اول و زوج بیاید: $\{۲\}$
$A \cup B$	حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.		در پرتاب یک تاس عددی اول یا زوج بیاید: $\{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$
$A - B$	A رخ دهد ولی B رخ ندهد.		در پرتاب یک تاس عددی اول و غیرزوج بیاید: $\{۳, ۵\}$
A'	A رخ ندهد.		در پرتاب یک تاس عددی اول نیاید: $\{۱, ۴, ۶\}$

توجه: برای تفاضل متقارن داریم: فقط A یا فقط B رخ دهد.



۵۵- در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده ۵ یا حاصل ضرب آن‌ها ۶ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{1}{6} \quad (۳) \quad \frac{1}{9} \quad (۴)$$





قوانین احتمال



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۱. احتمال آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد:

۲. احتمال آن که دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد:

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۳. احتمال آن که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد:

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

۴. احتمال آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

۵. احتمال آن که هیچ کدام از دو پیشامد A و B رخ ندهند:

$$P(A \cap B) = 0$$

۶. اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند:

تیپ مسئله



۵۶- با کدام احتمال، رقم سمت راستِ کد ۱۰ رقمی اپلیکیشن X از ۳ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟
تألیفی

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{10} \quad (۱)$$

۵۵- در جعبه‌ای ۳ لامپ سالم و ۷ لامپ معیوب موجود است. دو لامپ به تصادف از این جعبه یکی پس از دیگری، متوالیاً

خارج می‌کنیم. احتمال آن که تنها یکی از آن‌ها سالم باشد، کدام است؟
انرژی اتمی

$$\frac{7}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{15} \quad (۱)$$

تیپ قوانین احتمال



۵۷- اگر برای دو مجموعه‌ی S و A داشته باشیم $n(S - A) = 5$ ، $n(A \cap S) = 7$ و S کل حالات و A مجموعه‌ی حالت‌های

مطلوب باشد، احتمال این که A اتفاق نیفتد، کدام است؟
نمونه دولتی چهارم سال و هفتمی و فارسی

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۱)$$