



classino

آمار و احتمال

پایه یازدهم

محمد صحت کار

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۶

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

درس اول

آشنایی با منطق ریاضی

تعریف منطق ریاضی

منطق ریاضی که به آن منطق نمادین هم می گویند دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار برده می شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

گزاره

تعریف

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، **گزاره** می گویند. جمله های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی شوند زیرا خبری را بیان نمی کنند. معمولاً گزاره ها را با حروف p ، q ، r و ... نمایش می دهند.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوئیم. ارزش گزاره درست را با حرف T یا 1 و ارزش گزاره نادرست را با حرف F یا 0 نمایش می دهیم. یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد.

به عنوان مثال جمله های زیر گزاره هستند:

الف) تهران پایتخت ایران است. $\leftarrow$ گزاره درست

ب) ۹۹ بزرگترین عدد اول دورقمی است. $\leftarrow$ گزاره نادرست

پ) $13 = 11 + \sqrt{4}$ $\leftarrow$ گزاره درست

ب) ایران کشوری در قاره اروپا است. $\leftarrow$ گزاره نادرست

تعریف

حدس ها در ریاضیات، مسائل حل نشده ای هستند که درستی یا نادرستی آنها تا کنون مشخص نشده است و به اصطلاح پرونده آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه بر این که درستی آنها اثبات نشده است تا کنون هم برای آنها مثال نقضی پیدا نشده است.

دقت کن مهندس!
تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا a که
مضرب b باشند برابر است با:
 $\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$

تمرین: از بین جمله های زیر گزاره ها را مشخص کنید و در صورت امکان ارزش آنها را تعیین کنید.

جمله	گزاره	ارزش
تیم ملی فوتبال اسپانیا، قهرمان جام جهانی ۲۰۲۶ است.	✓	>
تعداد اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر از ۱۰۰ برابر با ۳۳ است.	✓	>
لطفاً در سالن سینما گوشی های همراه خود را خاموش کنید.	✗	
هر عدد زوج به غیر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.	✓	؟
چه هوای خوبی!	✗	
میاژار موری که دانه کش است.	✗	
بین مجذور هر دو عدد متوالی یک عدد اول وجود دارد.	✓	؟
آیا ۲ عددی زوج است؟	✗	
هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.	✓	؟
ای کاش مردم به هم دروغ نمی گفتند.	✗	
بیستمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۳ است.	✓	ن
هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	✓	ن
لطفاً در کلاس را ببندید.	✗	
اینجا آشپز کیست؟	✗	
ایران کشوری آسیایی است.	✓	>
در پرتاب یک تاس احتمال آن که تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{1}{5}$ است.	✓	ن
ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.	✗	

تمرین: از جملات زیر کدام یک گزاره است. ارزش گزاره ها را مشخص کنید.

گزاره درست

گزاره نادرست

(ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

(ت) تخته سیاه را پاک کنید. **X**

(ج) چه باران شدیدی می آید. **X**

(ح) $\emptyset \notin \mathbb{R}$

(د) عدد $8 + 5^9$ عددی اول است.

(ر) آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

(پ) $3 + 5 > 6$

(ث) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

(چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. گزاره نادرست

(خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

(ذ) به امید کامیابی شما. **X**

جدول ارزش گزاره ها (truth table)

ارزش هر گزاره می تواند درست یا نادرست باشد. بنابراین برای ارزش دو گزاره p و q مطابق جدول زیر $2 \times 2 = 4$ حالت وجود دارد و برای سه گزاره p ، q و r مطابق جدول زیر $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت امکان پذیر است:

$$\begin{array}{c} p \\ \vee \\ q \\ \wedge \\ r \end{array}$$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$$\frac{2 \times 2}{p \ q} = 4$$

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$\frac{2 \times 2 \times 2}{p \ q \ r} = 8$$

نکته

هر گزاره می تواند یکی از ۲ ارزش درست یا نادرست را داشته باشد بنابراین با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم جدول ارزش این گزاره ها 2^n حالت مختلف دارد.

برای ارزش ۵ گزاره مختلف اگر ارزش گزاره اول درست و ارزش گزاره دوم نادرست باشد، چند حالت مختلف وجود دارد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} \times \frac{2}{r} \times \frac{2}{s} \times \frac{2}{t} = 8$$

برای ارزش ۷ گزاره مختلف اگر بدانیم که حداقل ارزش یک گزاره درست است، چند حالت مختلف وجود دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲۷ (۳)

۶۴ (۲)

۶ (۱)

$$2^7 = 128$$

تعداد کل حالت ها

$$128 - 1 = 127$$

تعداد حالت های نامطلوب = ۱

ن ن ن ن ن ن ن

نقیض یک گزاره

تعریف

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نمایش داده می شود و آن را «چنین نیست که p » یا «این طور نیست که p » می خوانیم.

به علامت $\sim$ ، ناقض گفته می شود. اگر ارزش یک گزاره درست باشد ارزش نقیض آن نادرست است و برعکس.

تمرین: نقیض کدام گزاره زیر، به درستی نوشته شده است؟

$\sim p$	p
ایران کشوری در قاره اروپا است. ✗	ایران کشوری در قاره آسیا است.
چنین نیست که ۵ عددی گنگ است. ✓	۵ عددی گنگ است.
برلین پایتخت آلمان است. ✓	برلین پایتخت آلمان نیست.
حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است. ✗	حاصل ضرب هر دو عدد فرد، عددی فرد است.

نقیض نقیض یک گزاره

تعریف

$\sim(\sim p)$ را نقیض نقیض گزاره p می گویند. این گزاره با گزاره p هم ارز منطقی است.

به عبارت دیگر ارزش گزاره های $\sim(\sim p)$ و p یکسان است. در این حالت می نویسیم:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

تمرین: درستی هم ارزی $\sim(\sim p) \equiv p$ را با استفاده از جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید.

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
$>$	$<$	$>$
$<$	$>$	$<$

$\sim(\sim p) \equiv p$

گزاره نما

تمرین: جمله ها و عبارت های خبری زیر را در نظر بگیرید و ارزش هر کدام را مشخص کنید.

حاصل جمع دو برابر عددی با پنج برابر عددی دیگر برابر با ۱۳ است.

$$2x + 5y = 13$$

در کیسه ای ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی هست. دو مهره با هم از این کیسه برمی داریم. احتمال آن که پیشامد A رخ دهد برابر ۰/۱ است.

$$n = 5k + 1$$

n یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

مثلث ABC متساوی الساقین است.

a عددی اول است.

a برادر b است.

x مربع کامل است.

$$x \geq y$$

ارزش هیچ کدام از جمله های خبری فوق را نمی توانیم تعیین کنیم. همه این جمله ها گزاره نما هستند.

تعریف

هر جمله خبری شامل یک یا چند متغیر که با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آنها، گزاره‌نمای یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

همه تساوی‌ها و نامساوی‌هایی که بر حسب یک یا چند متغیر باشند، گزاره‌نما محسوب می‌شوند. بنابراین تمام معادله‌های ریاضی و تمام نامعادلات ریاضی گزاره‌نما هستند.

تمرین: در جمله‌های زیر گزاره‌نماها را مشخص کنید.

- ✓ اگر x عددی حقیقی باشد آن‌گاه $x^2 + 7x - 11 = 0$ است. ✓
 ✓ حاصل جمع ۳ برابر عددی با ۷ برابر عددی دیگر برابر با ۱۱ است. ✓
 $3x + 7y = 11$ ✓
 ✓ x عددی فرد کوچکتر از ۲۰ است. ✓
 در پرتاب یک تاس احتمال پیشامد $A = \{2, 3, 4\}$ برابر با $0/5$ است. گزاره درست
 همه اعداد اول، فرد هستند. گزاره نادرست
 x عددی زوج و نامنفی است. ✓

تمرین: گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال پیشامد A برابر با $\frac{1}{3}$ است.» را در نظر بگیرید. به جای مجموعه A کدام مجموعه‌ها را می‌توانیم قرار دهیم تا گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل شود؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\frac{n(A)}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow n(A) = 2$$

می‌تواند هر زیرمجموعه ۲ عضوی A باشد.
 به عنوان مثال: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}$

تمرین: در کدام حالت‌های زیر گزاره‌نمای « $5x + 8y = 23$ » به یک گزاره درست تبدیل می‌شود؟

الف) $x = 3, y = 1$ ✓ ب) $x = 11, y = -4$ ✓ پ) $x = 2, y = 3$ ✗ ت) $x = -5, y = 8$ ✗

$$\begin{array}{llll} 15 + 8 = 23 & 55 - 32 = 23 & 10 + 24 \neq 23 & -25 + 64 \neq 23 \\ \checkmark & \checkmark & \times & \times \end{array}$$

تعریف

برای هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرها قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنه متغیر گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای هر گزاره‌نما به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره درست شود **مجموعه جواب گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند. بنابراین همواره S زیرمجموعه D است.

تمرین: دامنه متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه جواب هر کدام را بنویسید.
الف) x مربع کامل است. (ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

$$\frac{2x+1}{3} \leq -1 \quad (\text{پ}) \quad \{n(n+1) = 0 : n \in \mathbb{W}\} \quad (\text{ت})$$

تمرین: جاهای خالی را با مجموعه درست کامل کنید.

دامنه متغیر گزاره‌نمای « p عددی اول است.» مجموعه است.

دامنه متغیر گزاره‌نمای « x عددی فرد است.» مجموعه است.

دامنه متغیر گزاره‌نمای « $5x^2 + 2x - 1 = 0$ » مجموعه است.

تمرین: دامنه متغیر گزاره‌نمای $1 \leq \frac{x-4}{\sqrt{3-|x|}}$ را بیابید.

مجموعه جواب گزاره‌نمای $\sqrt{5-x} < 2$ کدام است؟

- (۱) $(1, 5]$ (۲) $(2, 5]$ (۳) $(3, 5]$ (۴) $(4, 5)$

۹۴

تمرین: دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر کدام را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۸ است. $(D = \mathbb{Z})$

پ) یک تاس همگن را یک بار پرتاب می‌کنیم و $P(X) = \frac{1}{6}$ $(D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

ب) $3x^2 - 14x - 5 = 0$ $(D = \mathbb{R})$

گزاره‌های مرکب

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. انواع ترکیب‌های دو گزاره عبارتند از: **ترکیب فصلی**، **ترکیب عطفی**، **ترکیب شرطی** و **ترکیب دوشروطی**.

ترکیب فصلی دو گزاره

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند گزارهٔ مرکب p یا q را که به صورت $p \vee q$ مینویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گویند. به رابط منطقی $\vee$ فاصل می‌گویند.

به عنوان مثال: تیم ملی فوتبال ایران به مسابقات نهایی جام جهانی ۲۰۲۲ صعود می‌کند یا تیم ملی فوتبال ژاپن به مسابقات نهایی جام جهانی ۲۰۲۲ صعود می‌کند.

اگر فقط تیم ایران به این مسابقات صعود کند، ارزش این گزارهٔ مرکب درست است. اگر فقط تیم ژاپن به این مسابقات صعود کند، ارزش این گزارهٔ مرکب درست است. اگر هر دو تیم ایران و ژاپن هم به دور نهایی صعود کنند، باز هم ارزش این گزاره درست است. تنها در صورتی ارزش این گزاره نادرست است که هر دو تیم ایران و ژاپن به این مسابقات صعود نکنند. با توجه به این مثال می‌توانیم جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ را به صورت زیر بنویسیم:

p	q	$p \vee q$
د	د	
د	ن	
ن	د	
ن	ن	

نتیجه

اگر چند گزاره با هم ترکیب فصلی شده باشند در صورتی ارزش گزارهٔ مرکب درست است که حداقل یکی از این گزاره‌ها درست باشند.

تمرین: گزاره «هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \times b = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$ » را به زبان ریاضی بیان کنید.

اگر گزاره مرکب $p \vee q \sim$ گزاره ای نادرست باشد آن گاه ارزش کدام گزاره زیر نادرست است؟

- (۱) p (۲) q (۳) $p \vee q$ (۴) $p \vee \sim q$

۹۵

ترکیب عطفی دو گزاره

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند گزاره مرکب p و q را که به صورت $p \wedge q$ مینویسند، ترکیب عطفی دو گزاره می گویند. به رابط منطقی $\wedge$ عاطف می گویند.

به عنوان مثال: تهران پایتخت ایران است و حسن یزدانی در مسابقات کشتی المپیک ريو ۲۰۱۶ مدال طلا گرفت. ارزش هر دو گزاره درست است پس ارزش گزاره مرکب حاصل درست است. دقت کنید که اگر ارزش حتی یکی از این دو گزاره نادرست بود ارزش گزاره مرکب نادرست می شد.

با توجه به این مثال می توانیم جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ را به صورت زیر بنویسیم:

p	q	$p \wedge q$
د	د	
د	ن	
ن	د	
ن	ن	

نتیجه

اگر چند گزاره با هم ترکیب عطفی شده باشند در صورتی ارزش گزاره مرکب نادرست است که حداقل یکی از این گزاره‌ها نادرست باشند.

تمرین: گزاره «اگر x عددی صحیح و مضرب ۳۵ باشد آن گاه x مضرب ۵ و مضرب ۷ است.» را به زبان ریاضی بیان کنید.

اگر گزاره مرکب $p \wedge q \sim$ گزاره‌ای درست باشد آن گاه ارزش کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee q$ (۴) $p \vee \sim q$

۹۶

تمرین: خانه‌های خالی جدول زیر را کامل کنید:

گزاره p	گزاره q	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
هفته ۷ روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.				
	عدد ۷ مضرب ۵ نیست.	ن			
۲ عددی اول است.			ن		
		ن	ن		
(-۷) عددی اول است.				د	

قوانین و اتحادهای ترکیب‌های فصلی و عطفی

اگر p ، q و r سه گزاره باشند آن‌گاه اتحادهای زیر برای این گزاره‌ها برقرار است:

شرکت پذیری	جا به جایی
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
توزیع پذیری (پخشی)	خودتوانی
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$

تمرین: با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها هم‌ارزی های منطقی فوق را ثابت کنید.

تمرین: هم‌ارزی $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ را ثابت کنید.

تمرین: هم‌ارزی $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ را ثابت کنید.

نتیجه (قانون هم پوشانی)

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \qquad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

تمرین: هم‌ارزی $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ را ثابت کنید.

تمرین: هم‌ارزی $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ را ثابت کنید.

نتیجه (قانون جذب)

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

قوانین دموورگان

تمرین: جدول زیر را کامل کنید.

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$

تمرین: جدول زیر را کامل کنید.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$

نتیجه (قانون دموورگان)

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

گزاره مرکب $p \wedge \sim (p \wedge q)$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی است؟

$$p \vee \sim q \quad (۴)$$

$$p \vee q \quad (۳)$$

$$p \wedge q \quad (۲)$$

$$p \wedge \sim q \quad (۱)$$

۹۷

گزاره مرکب $(p \vee q) \sim p \vee q$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی است؟

$$p \vee \sim q \quad (۴)$$

$$p \vee q \quad (۳)$$

$$p \wedge q \quad (۲)$$

$$p \wedge \sim q \quad (۱)$$

۹۸

ترکیب شرطی دو گزاره

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند گزاره مرکب اگر p آن گاه q را که به صورت $p \Rightarrow q$ مینویسند، ترکیب شرطی دو گزاره می نامند.

در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به p مقدم (فرض) و به q تالی (حکم) می گویند.

به گزاره $q \Rightarrow p$ عکس گزاره $p \Rightarrow q$ می گویند.

نمونه‌هایی از گزاره‌های شرطی که قبلاً در ریاضیات و هندسه مشاهده کرده‌اید در زیر آمده است:

(الف) اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن گاه اندازه میانه نظیر وتر، نصف وتر است.

(ب) اگر دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین و محیطی باشد آن گاه ارتفاع دوزنقه واسطه هندسی بین اندازه‌های دو قاعده است.

(پ) اگر A پیشامدی از فضای نمونه S باشد آن گاه $A \subseteq S$ است.

برای تعیین ارزش گزاره‌های مرکب شرطی به این مثال توجه کنید: «اگر ۲ عددی گویا باشد آن گاه 2^n عددی گنگ است.»

در این گزاره مرکب شرطی، ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است پس ارزش گزاره مرکب حاصل نادرست است.

با توجه به این مثال می توانیم جدول ارزش $p \Rightarrow q$ را به صورت زیر بنویسیم:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	
د	ن	
ن	د	
ن	ن	

اگر دو گزاره با هم ترکیب شرطی شده باشند تنها در صورتی ارزش گزاره مرکب نادرست است که گزاره اول (مقدم) درست و گزاره دوم (تالی) نادرست باشد.

تعریف

اگر ارزش گزاره اول نادرست باشد بدون توجه به ارزش گزاره دوم، ارزش گزاره مرکب درست است. به این نتیجه گیری «انتفای مقدم» می گویند.

با توجه به جدول می توان نتیجه گرفت که:

اگر ارزش گزاره دوم درست باشد، ارزش گزاره مرکب همواره درست است.

تمرین: ارزش گزاره های شرطی زیر را مشخص کنید.

الف) اگر ۵ عددی گویا باشد آن گاه ۱۳ عددی اول است.

ب) اگر ۲ عددی فرد باشد آن گاه ۴ عددی گویا است.

پ) اگر نقطه ای روی محیط دایره باشد که فاصله اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره نباشد آن گاه فاصله تهران تا کرج ۱۰۰۰ کیلومتر است.

ت) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آن گاه زاویه های پای دو ساق با هم برابرند.

ث) اگر ۵ عددی اول باشد آن گاه هر عدد طبیعی مضرب ۵ نیز عددی اول است.

ج) اگر $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد آن گاه $3 + \sqrt{2}$ نیز عددی گویا است.

چ) اگر مجموع زوایای داخلی مثلثی برابر با ۲۰۰ درجه باشد آن گاه اندازه قطرهای همه متوازی الاضلاع ها برابر است.

اگر گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ گزاره ای درست و $p \Rightarrow r$ گزاره ای نادرست باشد آن گاه کدام گزاره زیر درست است؟

- (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $q \vee r$ (۳) $r \wedge q$ (۴) $\sim p \vee r$

۹۹

اگر عکس گزاره مرکب $q \Rightarrow p$ گزاره ای نادرست باشد آن گاه ارزش کدام گزاره زیر نا درست است؟

- (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $\sim p \vee q$
(۳) $q \Rightarrow p$ (۴) $\sim p \Rightarrow q$

۱۰۰

تمرین: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها، ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) $p \Rightarrow (p \vee q)$ ب) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

تمرین: جدول زیر را کامل کنید.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \Rightarrow p$

تعریف

به گزاره‌هایی مانند $p \Rightarrow p$ و $p \vee \sim p$ ، $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ، $p \Rightarrow (p \vee q)$ به گزاره‌های همواره درست و به گزاره‌هایی مانند $p \wedge \sim p$ گزاره همواره نادرست می‌گویند.

چند تا از گزاره‌های زیر گزاره‌های همواره درست هستند؟

ت $p \vee \sim p$

پ $(p \wedge q) \Rightarrow p$

ب $p \Rightarrow (p \vee q)$

الف $p \Rightarrow p$

۴ (۴

۳ (۳

۲ (۲

۱ (۱



کدام گزاره زیر همواره درست است؟

۲ $(p \vee q) \Rightarrow p$

۱ $p \Rightarrow (p \wedge q)$

۴ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

۳ $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$



چند تا از گزاره‌های زیر گزاره‌های همواره نادرست هستند؟

الف) $p \Rightarrow \sim p$	ب) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow F$	پ) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p$	ت) $p \wedge \sim p$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۰۳

تمرین: درستی هم‌ارزی منطقی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$

نتیجه

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

تمرین: هم‌ارز منطقی گزاره شرطی اگر بهروز در آزمون کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب کند آن‌گاه در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته می‌شود را بنویسید.

تمرین: هم‌ارزی منطقی $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ را ثابت کنید.

تمرین: هم‌ارزی منطقی $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ را ثابت کنید.

نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی است؟

- (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $\sim p \vee q$ (۳) $p \vee \sim q$ (۴) $\sim p \wedge q$

۱۰۴

نتیجه

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

تمرین: نقیض گزاره شرطی اگر p عددی اول باشد آن گاه فقط بر ۱ و بر خودش بخش پذیر است را بنویسید.

نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ با کدام گزاره زیر هم ارز منطقی است؟

- (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $\sim p \vee q$ (۳) $p \vee q$ (۴) $p \wedge q$

۱۰۵

اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه گزاره مرکب $\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ **سنجش ۳۱ فروردین ۱۴۰۳**

(۱) هم ارز منطقی با p است.

(۲) هم ارز منطقی با q است.

(۳) همواره درست است.

(۴) همواره نادرست است.

۱۰۶

تعریف شرط کافی و شرط لازم (خواندنی)

اگر گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره‌ای درست باشد آن گاه می‌گوییم:

p برای q شرط کافی است.

به عبارت دیگر رخ دادن p برای رخ دادن q کافی است.

بنابراین اگر p رخ دهد (درست باشد) قطعاً q نیز رخ می‌دهد (درست است).

q برای p شرط لازم است.

به عبارت دیگر رخ دادن q برای رخ دادن p لازم است.

بنابراین اگر q رخ نداده باشد (نادرست باشد) قطعاً p نیز رخ نداده است. (نادرست است).

به عنوان مثال: در گزاره شرطی اگر قیمت این کفش کمتر از ۵۰۰ هزار تومان باشد آن گاه آن را می‌خرم ، قیمت کمتر از ۵۰۰ هزار تومان کفش برای خریدن آن شرط کافی است و اگر کفش را نخریده باشیم قطعاً قیمتش کمتر از ۵۰۰ هزار تومان نبوده است.

به عنوان مثال: در گزاره شرطی اگر دو مثلث همنهشت باشند آن گاه اندازه زاویه‌های متناظر آن با هم برابرند ، «همنهشت بودن دو مثلث» برای «برابر بودن زاویه‌های متناظر آن‌ها» شرط کافی است و «برابر بودن زاویه‌ها» برای «همنهشت بودن مثلث‌ها» شرط لازم است. به عبارت دیگر اگر دو مثلث زاویه‌های برابر نداشته باشند قطعاً همنهشت نیستند.

برای گزاره شرطی «اگر فردا باران ببارد من با چتر به دانشگاه می‌روم.» چند تا از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

- الف) بارش باران شرط لازم برای بردن چتر است. ب) بردن چتر شرط کافی برای بارش باران است.
پ) بارش باران شرط کافی برای بردن چتر است. ت) بردن چتر شرط لازم برای بارش باران است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تعریف

گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می گویند.

تمرین: جدول زیر را کامل کنید و نتیجه حاصل را بنویسید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

نتیجه

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

عکس نقیض گزاره «اگر فردا هوا طوفانی باشد آن گاه مسابقه فوتبال برگزار نمی شود.» کدام گزینه است؟

(۱) اگر فردا هوا طوفانی نباشد آن گاه مسابقه فوتبال برگزار می شود.

(۲) اگر فردا هوا طوفانی نباشد آن گاه مسابقه فوتبال برگزار نمی شود.

(۳) اگر فردا مسابقه فوتبال برگزار شود آن گاه هوا طوفانی نیست.

(۴) اگر فردا مسابقه فوتبال برگزار نشود آن گاه هوا طوفانی است.

۱۰۸

تمرین: درستی گزاره «اگر a^2 عددی فرد باشد آن گاه a عددی فرد است» را ثابت کنید.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

تعریف

هر گاه p و q دو گزاره باشند گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می گوئیم.

گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت های زیر می توانیم بخوانیم:

اگر p آن گاه q و برعکس. p شرط لازم و کافی برای q است. p اگر و تنها اگر q

به عنوان مثال: اگر ۲ عددی گویا باشد آن گاه 2^n عددی گویا است و برعکس.

در این گزاره مرکب دو شرطی، ارزش دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ درست است. بنابراین ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ نیز درست است.

با توجه به این مثال می توانیم جدول ارزش $p \Leftrightarrow q$ را به صورت زیر بنویسیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

تمرین: درستی هم ارزی های منطقی $p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ را با کمک جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$

نتیجه

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

تمرین: نقیض گزاره «اگر مثلثی متساوی الاضلاع باشد آن گاه اندازه هر زاویه داخلی آن 60° است و برعکس» را بنویسید.

اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه نقیض گزاره مرکب $[\sim p \wedge (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow p$ کدام است؟ **سنجش ۵ خرداد ۱۴۰۲**

(۱) p (۲) $\sim p$ (۳) همواره درست (۴) همواره نادرست

۱۰۹

تعریف

سورها عبارت هایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست تولید می کنند.

عبارت های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» سورها مهم هستند.

به جمله‌های زیر دقت کنید:

همهٔ مثلث های متساوی الاضلاع، متساوی الساقین هستند.

همهٔ دانش آموزان دبیرستان فرهنگ در سال تحصیلی گذشته قبول شده‌اند.

هر گردویی، گرد نیست.

مربع هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است.

هر مستطیلی یک مربع است.

بعضی از دانش آموزان دبیرستان های تهران، باهوش هستند.

بعضی از تیم های ملی فوتبال کشورهای آسیایی به جام جهانی فوتبال صعود می کنند.

کشوری وجود دارد که جمعیتش بیش تر از ۵۰ میلیون نفر است.

بعضی از اعداد اول، زوجند.

بعضی از دوزنقه‌ها، متساوی الساقین هستند.

برای بیان مفاهیمی مانند به ازای هر یا به ازای همه یا به ازای همهٔ مقادیر از علامت $\forall$ (با توجه به حرف اول کلمهٔ All) استفاده می کنیم و به آن **سور عمومی** می گوییم.

برای بیان مفاهیمی مانند به ازای برخی یا وجود دارد یا حداقل یکی هست یا به ازای بعضی مقادیر از علامت $\exists$ (با توجه به حرف اول کلمهٔ Exist) استفاده می کنیم و به آن **سور وجودی** می گوییم.

تمرین: جدول زیر را کامل کنید. (اعداد زوج را با E ، اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش می دهیم).

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
	برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$
$\forall a \in E ; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$	
$\exists p \in P ; p = 2k (k \in \mathbb{Z})$	
	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

تمرین: اگر P مجموعه اعداد اول باشد، گزاره $\forall a \in P ; a = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ را به صورت صحیح بیان کنید.

بیان درست گزاره $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Z} ; x > y$ کدام است؟

- (۱) هر عدد طبیعی از هر عدد صحیح بزرگ تر است.
- (۲) هر عدد طبیعی حداقل از یک عدد صحیح بزرگ تر است.
- (۳) هر عدد صحیح از هر عدد طبیعی بزرگ تر است.
- (۴) هر عدد صحیح دست کم از یک عدد طبیعی بزرگ تر است.



روش تشخیص ارزش گزاره های سوری

اگر D دامنه متغیر گزاره نمای $P(x)$ و S مجموعه جواب آن باشد آن گاه گزاره $\forall x : P(x)$ هنگامی درست است که مجموعه جواب $P(x)$ برابر با D باشد یعنی $S = D$. به عبارت دیگر باید گزاره نمای $P(x)$ به ازای همه عضوهای دامنه، گزاره ای درست باشد.

به عبارت دیگر گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می شود وقتی به یک گزاره درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند یعنی هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

تمرین: ارزش گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq x$

ب) $\forall x \in \mathbb{Z} ; x(x+1) = 2k (k \in \mathbb{Z})$

پ) $\forall x \in \mathbb{R} ; \tan x \times \cot x = 1$

اگر D دامنه متغیر گزاره‌نمای $P(x)$ و S مجموعه جواب آن باشد آن گاه گزاره $\exists x : P(x)$ هنگامی درست است که مجموعه جواب $P(x)$ ناتهی باشد یعنی $S \neq \emptyset$. به عبارت دیگر باید حداقل یک عضو در D باشد که گزاره‌نمای $P(x)$ به ازای آن عضو، گزاره‌ای درست باشد.

به عبارت دیگر گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

تمرین: ارزش گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

الف) $\exists x \in \mathbb{P} ; x = 2k$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x| - 1 < 0$

پ) $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 = 0$

ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{Z} : x = \frac{1}{x}$

(۲) $\exists x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} = -2$

(۳) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

(۴) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq x$



تمرین: درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(الف) هر عدد اول، فرد است.

(ب) هر عدد زوج غیر اول است.

(پ) در احتمال، هر پیشامد زیرمجموعه فضای نمونه است.

(ت) در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A هست که $P(A) > 1$

(ث) طول هر پاره خط، عددی حقیقی است.

(ج) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

(چ) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

نقیض یک گزاره سوری

برای نوشتن نقیض یک گزاره سوری باید به ترتیب زیر عمل کنیم:

۱- سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کنید.

۲- نقیض گزاره‌نمای $P(x)$ را بنویسید.

به عبارت دیگر:

$$\sim[\forall x; P(x)] \equiv \exists x; \sim P(x) \qquad \sim[\exists x; P(x)] \equiv \forall x; \sim P(x)$$

به عنوان مثال: نقیض گزاره «رتبه همه دانشجویان مهندسی برق دانشگاه تهران در کنکور سراسری ۵۰ یا کمتر است.» به صورت زیر است:

دانشجویی در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران تحصیل می‌کند که رتبه‌اش در کنکور سراسری بیشتر از ۵۰ است.
و نقیض گزاره «حداقل یکی از ورزشکاران ایرانی در المپیک ۲۰۲۲ مدال طلا کسب می‌کند.» به صورت زیر است:
همه ورزشکاران ایرانی در المپیک ۲۰۲۲ مدال طلا کسب نمی‌کنند یا به بیان دقیق تر هیچ ورزشکار ایرانی در المپیک ۲۰۲۲ مدال طلا کسب نمی‌کند.

نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» کدام است؟

- (۱) هر آسیایی، ایرانی نیست.
- (۲) هر ایرانی، آسیایی نیست.
- (۳) بعضی از آسیایی ها، ایرانی نیستند.
- (۴) بعضی از ایرانی ها، آسیایی نیستند.

۱ ۱ ۲

(۵)

نقیض گزاره $\forall x \in (-\infty, 0) : x + \frac{1}{x} \leq -2$ کدام است؟

- (۱) $\exists x \in (-\infty, 0) : x + \frac{1}{x} < -2$
- (۲) $\forall x \in (-\infty, 0) : x + \frac{1}{x} \geq -2$
- (۳) $\exists x \in (0, +\infty) : x + \frac{1}{x} > -2$
- (۴) $\exists x \in (-\infty, 0) : x + \frac{1}{x} > -2$

۱ ۱ ۳

تمرین: ارزش هر کدام از گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر کدام را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

ب) $\exists x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge x^2 \leq 1$

نقیض گزاره همه دانش آموزان بعضی از مدارس تهران، در مسابقات مرحله اول المپیاد ریاضی پذیرفته می شوند کدام است؟

- (۱) تمام دانش آموزان همه مدارس تهران، در مسابقات مرحله اول المپیاد ریاضی پذیرفته نمی شوند.
- (۲) برخی از دانش آموزان بعضی از مدارس تهران، در مسابقات مرحله اول المپیاد ریاضی پذیرفته نمی شوند.
- (۳) دست کم یکی از دانش آموزان هر مدرسه ای در تهران، در مسابقات مرحله اول المپیاد ریاضی پذیرفته نمی شود.
- (۴) بعضی از دانش آموزان تمام مدارس تهران، در مسابقات مرحله اول المپیاد ریاضی پذیرفته می شوند.

۱۱۴

(۵)

تمرین های کتاب درسی

تمرین ۱ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $(0/1)^3 \square (0/1)^5$ ب) اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ آنگاه $\sin \alpha \square \cos \alpha$

پ) نمودار تابع $y = x^2$ از نقطه $\square$ می گذرد. ت) $-(x-4)^2 \square 0$

ث) $y^2 = x^2$ تابع $\square$ ج) اگر $x^2 = a$ آنگاه $x = \square$

تمرین ۲ نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) اگر $1 < x < 5$ آنگاه $x^2 < x$ ب) ابوالوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$ ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

تمرین ۳ ارزش گزاره های مرکب زیر را مشخص کنید.

الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$ ب) $(5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0)$

پ) $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$ ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) $(2 > 3) \vee (-2 < -3)$ ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

چ) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	q	p	گزاره q	گزاره p
د					عدد ۲ زوج است.
	ن			$1 \neq 2$	
ن					$2 \in \{1, 2\}$
	د			عدد ۷ اول است.	

تمرین ۵ جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

ب) $\sim p \wedge p$

الف) $p \wedge \sim q$

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

پ) $\sim p \vee p$

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

تعریف 1 با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که:

ب) $p \vee F \equiv p$

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

ت) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

پ) $p \wedge T \equiv p$

ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

ح) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

چ) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

تمرین ۱۱ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

تمرین ۱۲ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall$ و $\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$

پ) همه اعداد اول فردند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوی که $1 - 2x > 5$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگتر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم: $x^3 = x$

تمرین ۹ هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$

الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$

ت) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$

پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$

تمرین ۱۰ ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید سپس نقیض هر یک را بنویسید.

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n + 1 \in P$

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

تست های کنکور سراسری

اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد آنگاه گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم ارز با کدام گزاره است؟
 کنکور ۱۳۹۶ داخل

$q \wedge r$ (۴)

$p \vee r$ (۳)

$q \wedge r$ (۲)

$p \wedge r$ (۱)

۱۱۵

با توجه به جدول ارزش گزاره های زیر سه تایی (a, b, c) کدام است؟ کنکور ۱۳۹۷ خارج

p	q	r	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$
د	a	b	ن	c

(۴) (ن، ن، د)

(۳) (د، د، ن)

(۲) (د، د، د)

(۱) (د، ن، د)

۱۱۶

گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x, y)$ با کدام گزاره نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟ **کنکور ۱۳۹۸ داخل**

$$(۱) y - x = ۶ \quad (۲) x - y = ۶ \quad (۳) x + y = ۶ \quad (۴) xy = ۶$$

۱ ۱ ۷

گزاره $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$ با کدام گزاره زیر هم ارزش است؟ **کنکور ۱۳۹۸ خارج**

$$(۱) p \vee (q \wedge r) \quad (۲) p \wedge (q \vee r) \quad (۳) r \Rightarrow (p \wedge q) \quad (۴) r \Rightarrow (p \vee q)$$

۱ ۱ ۸

کدام گزاره سوری زیر دارای ارزش درست است؟ **کنکور ۱۳۹۸ خارج**

$$(۱) \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x \quad (۲) \exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x$$

$$(۳) \exists x \in \mathbb{R} : \left| x + \frac{1}{x} \right| < 2 \quad (۴) \forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$$

۱ ۱ ۹

کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

$$(1) (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \quad (2) (p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$$

$$(3) (p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q) \quad (4) (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

۱۲۰

کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$ است؟ **کنکور ۱۳۹۹ خارج**

$$(1) p \quad (2) q$$

$$(3) p \wedge q \quad (4) p \Rightarrow q$$

۱۲۱

کدام گزاره زیر، هم ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل**

$$p \vee q \quad (۱)$$

$$\sim p \Leftrightarrow q \quad (۳)$$

۱ ۲ ۳

ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت زیر درست است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج**

$$p \text{ درست، } q \text{ نادرست، } r \text{ درست} \quad (۱) \quad p \text{ نادرست، } q \text{ نادرست، } r \text{ نادرست} \quad (۲)$$

$$p \text{ درست، } q \text{ درست، } r \text{ نادرست} \quad (۳) \quad p \text{ نادرست، } q \text{ درست، } r \text{ نادرست} \quad (۴)$$

۱ ۲ ۳

کدام گزاره زیر، هم ارز منطقی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$ است؟ **کنکور دی ماه ۱۴۰۱ داخل**

$$p \vee q \quad (۱)$$

$$\sim p \Leftrightarrow q \quad (۴)$$

۱۲۴

علی، احمد، روزبه، داود و حامد بر حسب قد مرتب می شوند. می دانیم که حداقل دو نفر از آنان از علی کوتاه تر هستند. داود از روزبه کوتاه تر است. احمد کوتاه ترین پسر نیست. داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه گیری نادرست است؟ **کنکور ۱۴۰۱ داخل**

(۱) روزبه بلندتر از علی است. (۲) احمد بلندتر از حامد است.

(۳) داود بلندتر از احمد است. (۴) احمد بلندتر از علی است.

۱۲۵

اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

 r (۱)

 T (۲)

 $\sim r$ (۳)

 $\sim T$ (۴)

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ داخل

۱۲۶

در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ کدام مورد صحیح است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۳ داخل**

(۱) همواره درست است. (۲) همواره نادرست است.

(۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد. (۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

۱۲۷

گزاره $p \Leftrightarrow q \sim$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \quad (۲)$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \quad (۱)$$

$$\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] \quad (۴)$$

$$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \quad (۳)$$

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴ داخل

۱۲۸

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۱)$$

$$\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad (۴)$$

$$\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۳)$$

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ داخل

۱۲۹

نقیض گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$ هم ارز منطقی کدام گزاره زیر است؟

$\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ (۲)

$\sim p \Rightarrow \sim (r \Rightarrow q)$ (۱)

$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ (۴)

$p \Rightarrow \sim (r \Rightarrow q)$ (۳)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ خارج

۱۳۰

درس دوم

جبر مجموعه ها

تعریف

مجموعه یک مفهوم بنیادی و ابتدایی در ریاضی است که به دسته ای از اشیای متمایز و خوش تعریف اطلاق می شود. خوش تعریف بودن به آن معنی است که بتوان بدون تردید و به یقین مشخص کرد که شی معینی در آن هست یا نیست.

به عنوان مثال اعداد طبیعی یک رقمی، یک مجموعه است اما شاعران معروف ایرانی، مجموعه نیست. عناصر هر مجموعه را عضوهای مجموعه می نامند. ترتیب عضوها در مجموعه اهمیتی ندارد. عضوهای مشابه و تکراری در مجموعه، یک عضو محسوب می شوند.

به عنوان مثال مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 5, 1, 4, 3\}$

و $C = \{1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5\}$ با هم برابرند.

به مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی می گویند و آن را با $\emptyset$ نشان می دهند.

تمرین: کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر تهی و کدام ناتهی است؟

الف) $\{x \in \mathbb{Z} ; 2x = 4\}$ و $\{x \in \mathbb{Z} ; x^2 = 9\}$ ب) $\{x \in \mathbb{Z} ; x + 8 = 8\}$

پ) $\{x \in \mathbb{Z} ; x \neq x\}$ ت) $\{x \in \mathbb{N} ; x^2 = 7x\}$

نمایش مجموعه

مجموعه‌ها را به طور کلی به ۳ صورت می‌توان نمایش داد:

۱- **با عضوهای آن** : در این نوع نمایش مجموعه، تمام اعضای مجموعه را داخل دو علامت آکلاَد قرار می‌دهند. اگر تعداد اعضا زیاد بوده و نظم خاصی داشته باشند چند عضو ابتدایی و انتهایی را می‌نویسند و بین آن‌ها چند نقطه می‌گذارند. به عنوان مثال مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ نایب‌تر از ۶۰ را به صورت $\{3, 6, 9, \dots, 60\}$ نشان می‌دهند.

۲- **با نمادهای ریاضی** : در این روش به جای نوشتن تمام اعضا، رابطه‌ی میان اعضا را با نمادهای ریاضی و با استفاده از گزاره‌نماها نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال مجموعه اعداد صحیح زوج از ۸- تا ۴۶ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$A = \{x ; x = 2k \text{ و } k \in \mathbb{Z} \text{ و } -4 \leq k \leq 23\}$$

تمرین: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} ; |x| \leq 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} ; m^2 = m\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{R} ; k^2 - 1 = 0\}$$

$$D = \{a \in S ; S \text{ فضای پرتاب نمونه پرتاب یک تاس است}\}$$

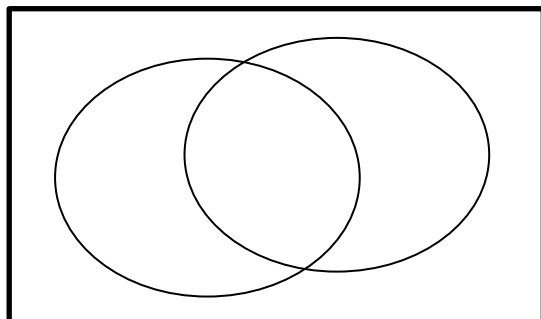
تمرین: بزرگترین عضو مجموعه $\{x^2 < 35 ; x \in \mathbb{N}\}$ را مشخص کنید.

تمرین: اگر $A_n = \{a ; a \in \mathbb{Z} \text{ و } 2^{n-1} < a \leq 2^n\}$ آن گاه مجموعه A_4 را با عضوهایش مشخص کنید.

تمرین: اگر $A_n = \{a \in \mathbb{Z} ; a \geq -n \text{ و } 2^a \leq n \text{ و } n \in \mathbb{N}\}$ آن گاه مجموعه A_3 را با عضوهایش مشخص کنید.

تمرین: اگر $A = \{-1, \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{3}, \frac{3}{4}\}$ آن گاه مجموعه $B = \{x ; x \in A \text{ و } x^2 \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید.

۳- با نمودار ون : در این روش ، عضوهای مجموعه را داخل یک شکل هندسی بسته مانند مستطیل ، مربع ، دایره و ... قرار می دهند. به عنوان مثال مجموعه اعدادی که در پرتاب یک تاس ممکن است ظاهر شوند را می توان به صورت زیر نمایش داد:



تعریف مجموعه مرجع

هر مجموعه مانند A را همواره می توان زیر مجموعه ای از یک مجموعه بزرگ تر در نظر گرفت که به آن **مجموعه مرجع** یا **مجموعه جهانی** می گویند.

مجموعه مرجع را معمولاً با M یا U یا S نشان می دهند.

به عنوان مثال مجموعه مرجع برای مجموعه $\{4, 22, 6, 12, 8\}$ می تواند مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد زوج باشد.

برای مجموعه $\{2, 3, 5, 7\}$ کدام مجموعه زیر مجموعه مرجع نیست؟

(۱) اعداد حقیقی (۲) اعداد اول (۳) اعداد طبیعی (۴) اعداد فرد

۱ ۳ ۱

تعریف مجموعه متمم

اگر مجموعه M ، مجموعه مرجع مجموعه A باشد آن گاه مجموعه عضوهای M که در A نباشند را **مجموعه متمم** A می نامند و آن را با A' نشان می دهند.

به عبارت دیگر:

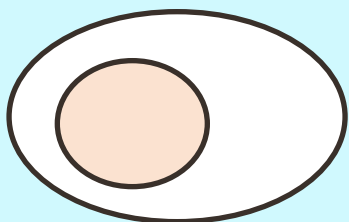
$$A' = \{x : x \in M \wedge x \notin A\}$$

به عنوان مثال: اگر $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و $A = \{a, d, h\}$ باشد آن گاه $A' = \{b, c, e, f, g\}$ است.

تمرین: اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی باشد آن گاه متمم مجموعه $\{n \in \mathbb{N} ; n^2 < 2^n\}$ را با عضوهایش مشخص کنید.

تعریف زیرمجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند و هر عضو A در B باشد
آن گاه می گوییم A زیرمجموعه B است و می نویسیم: $A \subseteq B$
مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه ای است.



به عنوان مثال مجموعه $B = \{2, 5\}$ یک زیرمجموعه
۲ عضوی از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

تمرین: همه زیرمجموعه های مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

تمرین: همه زیرمجموعه های مجموعه $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ را بنویسید.

تمرین: فرض کنید $A = \{a, b\}$ و درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را مشخص کنید.

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| الف) $\{a\} \in A$ | ب) $\emptyset \in A$ |
| پ) $\{a\} \subseteq A$ | ت) $b \subseteq A$ |
| ث) $a \in A$ | ج) $\{a, b\} \subseteq A$ |

تمرین: مجموعه $A = \{a, b, c\}$ و تمام زیرمجموعه هایش را در نظر بگیرید. اگر عدم وجود هر عضو از A در یک زیرمجموعه را با عدد ۰ و وجود هر عضو از A در یک زیرمجموعه را با عدد ۱ نمایش دهیم تمام زیرمجموعه ها را با کدهای سه رقمی متناظر کنید و بنویسید.

تمرین: با روش کدگذاری ثابت کنید که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است.

نتیجه

اگر مجموعه A مجموعه‌ای n عضوی باشد آن گاه

تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با: 2^n

تمرین: مجموعه اعداد اول یک رقمی چند زیرمجموعه دارد؟

تمرین: مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. اگر دو عضو به A اضافه کنیم ۴۸ واحد به تعداد زیرمجموعه‌های A اضافه می‌شود. تعداد عضوهای مجموعه A را بیابید.

اگر تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی یک مجموعه $k + 2$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه k عضوی، 23 واحد بیشتر باشد آن گاه مجموعه بزرگ‌تر چند زیرمجموعه دارد؟

۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴)

۱ ۳ ۲

تعریف زیرمجموعه محض یا سره

به همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خودش،
زیرمجموعه محض یا سره می‌گویند.

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند زیرمجموعه محض (سره) دارد؟

۳۱ (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۱ (۴)

۱ ۳ ۳

مجموعه $A = \{1, \{2, 1\}, 2, \{1, 2\}\}$ چند زیرمجموعه شامل $\{1, 2\}$ دارد؟

۴ (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴)

۱ ۳ ۴

مجموعه $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه ناتهی فاقد a است؟

۳ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱ ۳ ۵

اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ چند تا از رابطه های زیر درست هستند؟

الف) $B \subseteq C$ ب) $A \subseteq B$ پ) $A \in B$ ت) $B \in C$

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

۱۳۶

تمرین: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $D = \{3, 4, 5\}$ و $E = \{3, 5\}$ در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟
الف) X و B عضو مشترکی ندارند.

ب) $X \subseteq A$ ولی $X \not\subseteq C$

پ) $X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$

پ) $X \subseteq C$ ولی $X \not\subseteq A$

تمرین: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$

ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

تمرین: مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند در نظر بگیرید:

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است.}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است.}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است.}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است.}\}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟

$$D \subseteq A \quad (\text{ت})$$

$$A \subseteq B \quad (\text{پ})$$

$$B \subseteq D \quad (\text{ب})$$

$$D \subseteq C \quad (\text{الف})$$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد. در این صورت A را زیرمجموعه B نامیده و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

اگر عضوی در A باشد به طوری که آن عضو در B نباشد آن‌گاه A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.
با کمک نمادهای ریاضی می‌توانیم تعریف زیرمجموعه بودن یا نبودن را به صورت زیر بنویسیم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

اثبات چند قضیه مهم با استفاده از روش عضوگیری

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از مجموعه A در نظر بگیریم و سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در مجموعه B هست. از آنجا که x عضوی دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه ثابت کرده‌ایم که $A \subseteq B$

ویژگی ۱: اگر A ، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید که $A \subseteq C$ است.

ویژگی ۲: فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A \subseteq B$. ثابت کنید که $B' \subseteq A'$ است.

ویژگی ۳: برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید که $\emptyset \subseteq A$ است.

تمرین: برای دو مجموعه A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq (A \cup B)$ است.

تمرین: A ، B ، C و D چهار مجموعه با مرجع U هستند. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$ است.

تمرین: اگر A ، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید که $(A \cup B) \subseteq C$ است.

تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B باهم برابرند هرگاه هر عضو A در B باشد و برعکس. با توجه به تعریف زیر مجموعه می توان دریافت که دو مجموعه A و B با هم برابرند هرگاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد.

به عبارت دیگر می توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

به عنوان مثال: مجموعه های $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{3, 5, 4, 2\}$ و $C = \{2, 3, 2, 4, 4, 5\}$ باهم برابرند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که با جابه جایی اعضا یا تکرار آن ها مجموعه جدیدی ایجاد نمی شود.

تمرین: فرض کنید $A = \{1, 2\}$ کدام یک از مجموعه های زیر با A مساوی است؟

(الف) $\{x : x \in \mathbb{Q}, x^2 - 3x + 2 = 0\}$

(ب) $\{x : x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\}$

(پ) $\{x : x \in \mathbb{Q}, 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

(ت) $\{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 2\}$

تمرین: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند ثابت کنید که $A \cap B = B \cap A$ است.

تمرین: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A - B = \emptyset$ است.

اگر مجموعه های $A = \{\{x + 1\}, 5, \{y + 3, z - 6\}, 13\}$ و $B = \{x + 5, \{z - 3\}, \{6, 7\}, 5\}$ برابر باشند
آنگاه حاصل $x - y + z$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۱۳۷

اگر مجموعه های $A = \{2^{n+3}, 243\}$ و $B = \{3^{m+1}, 512\}$ مجموعه هایی برابر باشند آن گاه مجموعه $\{m+n, m-n, 8, 24, mn, 2\}$ چند عضو دارد؟

۳ (۴

۴ (۳

۵ (۲

۶ (۱

۱۳۸

چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\}$ عضو $\{a, b\}$ را ندارد؟ **کنکور ۱۳۹۱ داخل**

۱۲ (۴

۸ (۳

۶ (۲

۴ (۱

۱۳۹

مجموعه های $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض اند. کدام بیان درباره آن ها نادرست است؟

 $A \subset C$ (۴

 $B \in C$ (۳

 $A \in C$ (۲

 $A \in B$ (۱

کنکور ۱۳۹۵ داخل

۱۴۰

اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ ، $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند آنگاه مجموعه $A \cap B'$ چند زیرمجموعه دارد؟

کنکور ۱۳۹۸ داخل

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۱ ۴ ۱

قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها

عملیات مقدماتی بر مجموعه‌ها عبارتند از :

اشتراک دو مجموعه ، اجتماع دو مجموعه ، تفاضل دو مجموعه و تفاضل متقارن دو مجموعه.

۱- **اشتراک دو مجموعه** : اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ی عضوهایی است که هم در A و هم در B باشند و آن را با $A \cap B$ یا $B \cap A$ نشان می‌دهند.

تمرین: اگر $A = \{a^2 - a ; a \in \mathbb{Z} \text{ و } |a| \leq 1\}$ و $B = \{1 - a^2 ; a \in \mathbb{N} \text{ و } a \leq 3\}$ آنگاه $A \cap B$ را بنویسید.

۲- **اجتماع دو مجموعه** : اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه عضوهایی است که در A یا در B یا در هر دو باشند و آن را با $A \cup B$ یا $B \cup A$ نشان می دهند.

تعداد عضوهای اجتماع A و B یعنی $A \cup B$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تمرین: در میان کارمندان یک اداره ۱۲ نفر به پیتزا، ۹ نفر به آبگوشت و ۵ نفر به هر دو غذا علاقه مندند. چند نفر از آنان حداقل به یکی از این دو غذا علاقه دارند؟

۳- **تفاضل دو مجموعه** : تفاضل دو مجموعه A و B مجموعه عضوهایی است که در A باشند و در B نباشند و آن را با $A - B$ نشان می دهند. $A - B$ برابر است با $A \cap B'$.

تعداد عضوهای $A - B$ برابر است با :

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تمرین: در میان دانش آموزان یک کلاس ۱۵ نفر مسابقه فینال جام جهانی فوتبال، ۱۳ نفر مسابقه فینال والیبال المپیک و ۸ نفر هر دو مسابقه را تماشا کرده اند. چند نفر از آنان فقط مسابقه فینال جام جهانی را تماشا کرده اند؟

A ، B و C به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی مضارب ۲، ۳ و ۵ کوچک تر از ۱۰۰ هستند. مجموعه $C - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

۱۱ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۳ (۱)

۱ ۴ ۲

اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ آن گاه مجموعه $A - B$ چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱ ۴ ۳

اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ آن گاه مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱ ۴ ۴

(۴) **تفاضل متقارن دو مجموعه** : تفاضل متقارن دو مجموعه A و B مجموعه عضوهایی است که در $A-B$ یا در $B-A$ باشند و آن را با $A \Delta B$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تعداد عضوهای $A \Delta B$ برابر است با:

$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

تمرین: در یک جمع ادبی ۱۲ نفر شاهنامه فردوسی، ۱۷ نفر گلستان سعدی و ۱۰ نفر هر دو کتاب را خوانده اند. چند نفر فقط یکی از این کتاب ها را خوانده اند؟

تمرین: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ آن گاه هر یک از مجموعه‌های $A - B$ ، $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A \Delta B$ را با عضوهای مشخص کنید.

خواص عملیات روی مجموعه‌ها

تمرین: فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید که $A \cap B = B \cap A$ است. (خاصیت جابه جایی)

تمرین: فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید که $A \cup B = B \cup A$ است. (خاصیت جابه جایی)

تمرین: ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه A ، B و C از مجموعه مرجع U داریم: (خاصیت شرکت پذیری)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

تمرین: ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه A ، B و C از مجموعه مرجع U داریم: (خاصیت شرکت پذیری)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

تمرین: با استفاده از روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه A ، B و C از مجموعه مرجع U داریم: (خاصیت توزیع پذیری)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

تمرین: با استفاده از روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه A ، B و C از مجموعه مرجع U داریم: (خاصیت توزیع پذیری)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

دقت کن مهندس!

با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه های مرجع و تهی تساوی های زیر برقرارند:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

تمرین: با استفاده از قوانین فوق ثابت کنید: (U مجموعه مرجع است).

$$(A \cup B) \cap (A \cup B)' = A \quad (\text{الف})$$

$$(A \cap C) \cap (A' \cap C) = C \quad (\text{ب})$$

$$A \cup (B \cup A') = U \quad (\text{پ})$$

$$A - B = A \cap B' \quad (\text{ت})$$

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که: (قانون جذب یا همپوشانی)

$$A \cup (A \cap B) = A$$

روش اول:

روش دوم:

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که: (قانون جذب یا همپوشانی)

$$A \cap (A \cup B) = A$$

روش اول:

روش دوم:

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که: (قانون دمورگان)

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تمرین: عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B])$

ب) $(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$

تمرین: درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $A - B = B' - A'$

ب) $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Rightarrow X = \emptyset$

پ) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

ت) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ث) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

تمرین: برای هر دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U ثابت کنید که: (قانون دمورگان)

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

تمرین: با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A - B)' = A' \cup B$

ب) $(A - B) - C = (A - C) - B$

پ) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ت) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ث) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ج) $A - (B - C) = (A - B) - C$

چ) اگر $A \cup B = A \cap B$ آنگاه $A = B$

تمرین: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
 الف) دو مجموعه A و B با هم برابرند اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد.

ب) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن گاه $A \cup B \subseteq C$

پ) اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$

ت) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

ث) اگر $A \subseteq B$ آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup C$

ج) اگر $A \subseteq B$ آن گاه $A \cap C \subseteq B \cap C$

چ) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند آن گاه $B - A = B$

ح) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند آن گاه $B \subseteq A'$

مروری بر خواص عملیات روی مجموعه‌ها

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = M$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B$$

$$A - B = B' - A'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A \Delta B = A' \Delta B'$$

از کدام یک از رابطه های زیر نمی توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$ است؟

- (۱) $A \cap B = A$ (۲) $A \cup B = B$ (۳) $A - B = \emptyset$ (۴) $A - B = A$

۱۴۵

اگر $A = \{x + y, \{5, z + 1\}\}$ و $B = \{\{2, 2x - z\}, 7\}$ و $A - B$ و $B - A$ با هم برابرند باشند آنگاه حاصل xyz کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲

۱۴۶

چند تا از گزاره های زیر نادرست است؟

الف) دو مجموعه A و B با هم برابرند اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد.

ب) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \cup B \subseteq C$

پ) اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup D$

ت) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۱۴۷

چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup C$

ب) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap C \subseteq B \cap C$

پ) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند آنگاه $B - A = B$

ت) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند آنگاه $B \subseteq A'$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱ ۴ ۸

مجموعه $[(A - B) \cup (A \cap B)] \cup [B' \cup A] \cap (A \cap B)'$ متمم کدام مجموعه زیر است؟

$A' \cup B$ (۴)

$A \cup B'$ (۳)

$A' - B'$ (۲)

$A - B$ (۱)

۱ ۴ ۹

اگر U مجموعه مرجع و $B = [A \cup (A \cap B)] \cup [B \cap (A \cup B)]$ باشد آنگاه $B' - A'$ برابر با کدام مجموعه است؟

$\emptyset$ (۴)

U (۳)

B (۲)

A (۱)

۱ ۵ ۰

تعریف زوج مرتب

هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می دهند که اگر برای آن ها ترتیب قائل باشیم به آن یک **زوج مرتب** می گوئیم و با نماد (x, y) نمایش می دهیم.

دو زوج مرتب (x, y) و (z, t) با هم برابرند هرگاه $x = z$ و $y = t$ باشد.

اگر زوج مرتب های $(x - y, 3 - y)$ و $(5, x - 6)$ با هم برابر باشند آنگاه حاصل xy کدام است؟

۱۴ (۴)

۲۴ (۳)

۶ (۲)

-۶ (۱)

۱۵۱

تمرین: اگر مجموعه $A = \{(x + y, z + 1), (5, 8), (2y + 3, 15 - z)\}$ مجموعه ای یک عضوی باشد آنگاه حاصل $3x - y + z$ را بیابید.

تعریف ضرب دکارتی

اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه حاصل ضرب دکارتی آن ها، مجموعه ای از زوج مرتب ها است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times B = \{(x, y) ; x \in A \text{ و } y \in B\}$$

حاصل ضرب دکارتی یک مجموعه در خودش، به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times A = \{(x, y) ; x \in A \text{ و } y \in A\}$$

حاصل ضرب دکارتی $A \times A$ را با A^2 نمایش می دهند.

تمرین: اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ آن گاه مجموعه های $A \times B$ ، $B \times A$ و $B \times B$ را با عضوهای شان مشخص کنید.

نتیجه

$$A \times B \neq B \times A$$

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

تمرین: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ آن گاه مجموعه $(A \cup B) \times (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

تمرین: اگر A مجموعه ای دلخواه باشد آن گاه ثابت کنید که: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

تمرین: اگر A و B مجموعه‌هایی دلخواه باشد به طوری که $A \times B = B \times A$ آن‌گاه ثابت کنید که:

$$A = B \quad \text{یا} \quad A = \emptyset \quad \text{یا} \quad B = \emptyset$$

اگر $A = \{x^2, 9\}$ ، $B = \{16, y^2\}$ و $A \times B = B \times A$ آن‌گاه چند مجموعهٔ مختلف مانند $\{(x, y), (y, x)\}$ وجود دارد؟

$$2 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۱۵۲

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A \cap B = \{4, 5, 6, 7\}$ و مجموعهٔ $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۱۲ عضو باشد آن‌گاه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

$$13 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

۱۵۳

نمودار حاصل ضرب دکارتی

برای رسم نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ ، باید اعضای A را روی محور x ها و اعضای B را روی محور y ها در نظر بگیریم. در این شرایط چند حالت زیر امکان پذیر است:

(الف) اگر مجموعه های A و B بازه هایی از اعداد حقیقی باشند، نمودار $A \times B$ **سطح یک مستطیل یا مربع** است.

تمرین: اگر $A = (2, 5)$ و $B = [3, 4]$ آن گاه نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

(ب) اگر مجموعه های A و B مجموعه هایی گسسته از اعداد حقیقی باشند، نمودار $A \times B$ به صورت **چند نقطه** است.

تمرین: اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 5\}$ آن گاه نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

پ) اگر مجموعه A بازه ای از اعداد حقیقی و مجموعه B مجموعه ای گسسته باشد، نمودار $A \times B$ به صورت **پاره خط‌هایی موازی محور x ها** است.

تمرین: اگر $A = (-1, 4)$ و $B = \{1, 2, 5\}$ آن‌گاه نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

ت) اگر مجموعه A مجموعه ای گسسته و مجموعه B بازه ای از اعداد حقیقی باشد، نمودار $A \times B$ به صورت **پاره خط‌هایی موازی محور y ها** است.

تمرین: اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$ و $B = [-2, 1]$ آن‌گاه نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$ و $B = \mathbb{R}$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است)

- ۱) $A \times B$ خطوطی موازی محور x ها است.
- ۲) $A \times B$ پاره خط‌هایی موازی محور x ها است.
- ۳) $A \times B$ خطوطی موازی محور y ها است.
- ۴) $A \times B$ پاره خط‌هایی موازی محور y ها است.

اگر $A = (3, +\infty)$ و $B = \{2, 3, 5\}$ آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A \times B$ خطوطی موازی محور x ها است.
- (۲) $A \times B$ نیم خط هایی موازی محور x ها است.
- (۳) $A \times B$ خطوطی موازی محور y ها است.
- (۴) $A \times B$ نیم خط هایی موازی محور y ها است.

۱۵۵

اگر $A = [2, 6]$ و $B = (3, 8)$ آن گاه مساحت ناحیه متناظر با $A^2 - B^2$ چقدر است؟

- | | | | |
|-------|-------|--------|-------|
| ۷ (۴) | ۹ (۳) | ۱۱ (۲) | ۵ (۱) |
|-------|-------|--------|-------|

۱۵۶

تمرین های کتاب درسی

۱ کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساوی اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\}$$

۲ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن 384 واحد کم می شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

۳ اگر $A = \{2, x + 2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x - y\}$ و $A = B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۴ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$.

۵ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

$$\text{الف) } A \cup C \subseteq B \cup C \quad \text{ب) } A \cap C \subseteq B \cap C$$

۶ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

$$\text{الف) } A \cap C \subseteq B \cap D \quad \text{ب) } A \cap C \subseteq B \cup D$$

۷ الف) فرض کنید : $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید : $A = \emptyset$. ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید : $A = U$.

۸ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید :

ب) $B \subseteq A'$

الف) $B - A = B$

۹ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره ها، هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۱۰ درستی هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۱۱ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

ب $(A \cup B) - B$

پ $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۱۲ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

پ $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

ج $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

۱۳ اگر $A = \{y+2, 5, z\}$ و $B = \{x+1, 4, -2\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۱۴ با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

الف) $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$

ب) $A = \{3, 4\}, B = (1, 5]$

پ) $A = [2, 6], B = [3, 8]$

ت) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$

ث) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$

تست های کنکور سراسری

اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد مجموعه $A_1 \cup (A_4 - A_8)$ چند عضو دارد؟
 کنکور ۱۳۹۶ داخل

۸ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

۱۵۷

اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$ برابر کدام است؟
 کنکور ۱۳۹۷ داخل

A (۴)

B (۳)

$A \cup B$ (۲)

$A \cap B$ (۱)

۱۵۸

اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ و $C = \{\{1, 2, \{1, 2\}\}, 1\}$ باشند کدام بیان درباره این مجموعه ها نادرست

است؟ **کنکور ۱۳۹۷ خارج**

$$B \in C \quad (۴)$$

$$A \subset B \quad (۳)$$

$$B \subset C \quad (۲)$$

$$A \in B \quad (۱)$$

۱۵۹

اگر A و B دو مجموعه ناتهی با شرط $A \subset B$ باشند آنگاه کدام رابطه نادرست است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

$$B \cap A' = \emptyset \quad (۴)$$

$$A \cap B' = \emptyset \quad (۳)$$

$$B - A' = A \quad (۲)$$

$$A - B' = A \quad (۱)$$

۱۶۰

مجموعه $((B' \cup A) - B) \cap ((B \cap C)' \cap (A - B))$ با کدام مجموعه برابر است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

$$B' \quad (۴)$$

$$A \quad (۳)$$

$$A \cap B' \quad (۲)$$

$$A \cup B' \quad (۱)$$

۱۶۱

مجموعه $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)')$ با کدام مجموعه برابر است؟ **کنکور ۱۳۹۹ خارج**

- A (۱) B (۲) A' (۳) B' (۴)

۱۶۲

فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$ باشد. اگر $(A' - B)' \cap C' = B$ آنگاه

کدام عبارت درست است؟ **کنکور ۱۴۰۰ داخل**

- $B \subseteq A$ (۱) $A \cap B = \emptyset$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A = B$ (۴)

۱۶۳

فرض کنید $C = (A - B) \cup (B - A)$ باشد. حاصل $(A' \cap B')' \cap C'$ کدام است؟ **کنکور ۱۴۰۰ خارج**

- $A \cap B$ (۱) $A \cup B$ (۲) C (۳) C' (۴)

۱۶۴

اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند آنگاه مجموعه $A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل**

- (۱) $(A - B)'$ (۲) $B - A$ (۳) B (۴) $\emptyset$

۱۶۵

اگر U مجموعه مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشد کدام مورد درست است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج**

- (۱) $A = B$ (۲) $A = \emptyset$ (۳) $B = U$ (۴) $B = \emptyset$

۱۶۶

A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U هستند، مجموعه $[(A \cap B) - B]' \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$ با کدام مجموعه برابر است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج**

- (۱) A (۲) $\emptyset$ (۳) $A - B$ (۴) $A' - B'$

۱۶۷

اگر A ، B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $C - [(A - B)' - (B - C)] - C$ با کدام مجموعه برابر است؟ **کنکور دی ماه ۱۴۰۱ داخل**

$$(A' \cup B') - C \quad (۴) \quad C - (A \cup B) \quad (۳) \quad B - (A \cup C) \quad (۲) \quad A' - (B \cup C) \quad (۱)$$

۱۶۸

A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟

$$A = \emptyset \quad (۴) \quad B = A \quad (۳) \quad A = U \quad (۲) \quad B = U \quad (۱)$$

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴ داخل

۱۶۹

ساده شده عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟

$$A \quad (۴) \quad B \quad (۳) \quad B - A \quad (۲) \quad A - B \quad (۱)$$

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ داخل

۱۷۰

ساده شده عبارت $(B' \cap A) \cup [(B - A) \cup A'] \cap (A - B)$ کدام است؟

$A - B$ (۴)

$B - A$ (۳)

B (۲)

A (۱)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ خارج



اگر $A = \{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} : |k - 3| \leq 2\}$ آنگاه مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو

دارد؟ **کنکور ۱۳۹۲ داخل**

۱۶ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)



در مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x + 2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t - 1\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۷۳

اگر $A = [1, 4]$ و $B = (-1, 3]$ باشند مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحه مختصات کدام است؟

کنکور ۱۳۹۹ خارج

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۷۴

مجموعه‌های A ، B ، C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C ، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D ، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، 25% بیشتر از تعداد اعضای مجموعه $A \times B$ و $1/5$ برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل**

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

۱۷۵

برای مجموعه‌های $A = \{a - 2, 6, 2b + 1, c\}$ و $B = \{\sqrt{d}, 5, -1\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. در چند حالت $a + b + c = 9$ است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۲ داخل**

۴ (۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۷۶

برای مجموعه‌های $A = \{\frac{x}{2}, \frac{y}{3}, 5\}$ و $B = \{z, t, 1, 4\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. در چند حالت

$x + y + z + t > 20$ است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۲ خارج**

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



ترکیبات

شمارش بدون شماردن

t.me/mohammadsehatkar_math11

ریاضی دهم

تعریف اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m روش وجود داشته باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد آنگاه تعداد کل راه های ممکن برای انجام این کار برابر است با: $m \times n$

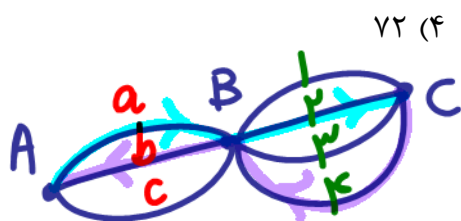
نتیجه

هرگاه هر حالت مطلوب یک k تایی مرتب مانند $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ باشد
تعداد کل حالت ها برابر است با: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$
که در آن n_i تعداد انتخاب ها یا آپشن های ممکن برای x_i است.

تمرین: از شهر A به شهر B سه جاده a, b و c و از شهر B به شهر C چهار جاده ۱, ۲, ۳ و ۴ وجود دارد. برای رفتن از A به C چند مسیر مختلف وجود دارد؟ همه مسیرها را بنویسید.



از شهر A به شهر B سه جاده a, b و c و از شهر B به شهر C چهار جاده ۱, ۲, ۳ و ۴ وجود دارد. برای رفتن از A به C و برگشتن به A چند مسیر مختلف وجود دارد؟



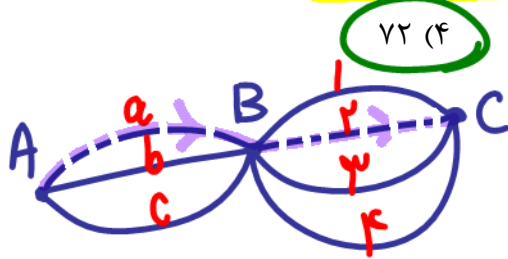
۴۸ (۳)

۱۴۴ (۲)

۲۴ (۱)

$$\frac{3}{B \rightarrow A} \times \frac{4}{C \rightarrow B} \times \frac{4}{B \rightarrow C} \times \frac{3}{A \rightarrow B} = 144$$

از شهر A به شهر B سه جاده a, b و c و از شهر B به شهر C چهار جاده ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. برای رفتن از A به C و برگشتن به A چند مسیر مختلف وجود دارد اگر از هر جاده فقط یک بار بتوانیم عبور کنیم؟



۴۸ (۳)

۱۴۴ (۲)

۲۴ (۱)

۷۲ (۴)

$$\overline{B \cup A} \times \overline{C \cup B} \times \overline{B \cup C} \times \overline{A \cup B} = 72$$

خانواده ای ۵ فرزند دارد. اگر بدانیم که فرزند اول و فرزند سوم این خانواده دختر هستند، مجموعه حالت های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

به چند طریق می توان سه مهره به رنگ های سبز ، سفید و قرمز را در سه خانه صفحه شطرنجی مقابل قرار داد به طوری که هیچ دو مهره ای در یک ردیف یا یک ستون نباشند؟

A B C D E

1		X		X	
2	X	●	X	X	X
3	X	X	X	○	X
4		X		X	
5		X		X	

۱۸۷۵ (۲)

۲۸۷۵ (۴)

۳۶۰۰ (۱)

۲۴۰۰ (۳)

$$\overline{25} \times \overline{16} \times \overline{9} = 3600$$

می‌خواهیم نمای بیرونی یک ساختمان ۴ طبقه را با استفاده از پنج رنگ آبی، سفید، زرد، بنفش و صورتی رنگ آمیزی کنیم. چند حالت مختلف امکان پذیر است اگر برای هر دو طبقه مجاور از رنگ یکسان استفاده نکنیم؟

(۱) $5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (۲) $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2$ (۳) $5 \times 4 \times 5 \times 4 \times 4$ (۴) این کار امکان پذیر نیست



می‌خواهیم رأس‌های یک مثلث را با استفاده از پنج رنگ آبی، سفید، زرد، بنفش و صورتی رنگ آمیزی کنیم. چند حالت مختلف امکان پذیر است اگر برای هر دو رأس مجاور از یک رنگ استفاده نکنیم؟

(۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱



تعریف اصل جمع

اگر کاری را بتوانیم به دو روش مختلف انجام دهیم به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب داشته باشیم آنگاه این کار را می‌توانیم به $m + n$ طریق مختلف انجام دهیم.

نتیجه

هرگاه دو مجموعه از حالت‌های مختلف داشته باشیم که با هم اشتراک نداشته باشند آنگاه تعداد کل حالت‌ها برابر است با حاصل جمع تعداد عضوهای این مجموعه‌ها. به عبارت دیگر:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

از شهر A به شهر B سه جاده a، b و c و از شهر B به شهر C چهار جاده ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. برای رفتن از A به C و برگشتن به A چند مسیر مختلف وجود دارد اگر مسیر رفت و مسیر برگشت یکسان نباشد؟

۹۶ (۴)

۱۴۳ (۳)

۱۳۲ (۲)

۷۳ (۱)



می‌خواهیم رأس‌های یک چهارضلعی را با استفاده از پنج رنگ آبی، سفید، زرد، بنفش و صورتی رنگ‌آمیزی کنیم. چند حالت مختلف امکان‌پذیر است اگر برای هر دو رأس مجاور از یک رنگ استفاده نکنیم؟

۱۸۰ (۴)

۲۶۰ (۳)

۲۸۰ (۲)

۱۶۰ (۱)



با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند کد پنج رقمی می‌توان نوشت؟ (رقم صفر می‌تواند اولین رقم سمت چپ باشد.)

۴۵ (۴)

۵۴ (۳)

 4×5^4 (۲)

۵۵ (۱)



با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

۴۵ (۴)

۵۴ (۳)

 4×5^4 (۲)

۵۵ (۱)



با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

(۱) ۲۴ (۲) ۹۶ (۳) ۴۸ (۴) ۶۰

۱۱

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی زوج می توان نوشت؟

(۱) ۱۵۰۰ (۲) ۳۰۰۰ (۳) ۱۲۰۰ (۴) ۲۴۰۰

۱۲

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

(۱) ۹۶ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴) ۶۰

۱۳

تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

(۱) ۹۴۸ (۲) ۹۵۲ (۳) ۹۶۸ (۴) ۹۷۲

۱۴

چند عدد چهاررقمی وجود دارد که حداقل دو رقم آن مشابه باشد؟

۴۴۶۴ (۴)

۴۶۴۴ (۳)

۴۴۵۴ (۲)

۴۵۴۴ (۱)

۱۵

تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۹ خارج**

۱۶۵۸ (۴)

۱۷۴۸ (۳)

۱۷۹۲ (۲)

۱۸۴۸ (۱)

۱۶

چند عدد سه رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بزرگتر از ۳۰۰ می توان نوشت؟

۱۰۷ (۴)

۱۰۸ (۳)

۷۱ (۲)

۷۲ (۱)

۱۷

چند عدد سه رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بدون تکرار ارقام بزرگتر از ۳۰۰ می توان نوشت؟

۵۷ (۴)

۵۶ (۳)

۵۹ (۲)

۶۰ (۱)

۱۸

چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{abcba}$ وجود دارد؟ (a، b و c رقم هستند)

۱۰۸۰ (۴)

۶۴۸ (۳)

۹۰۰ (۲)

۷۲۰ (۱)

۱۹

نکته

تعداد جایگشت های n شی متمایز در n مکان مختلف برابر است با: $n!$

پنج نفر به چند طریق مختلف می توانند در یک صف کنار هم بایستند؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

۲۰

۱۰۸

۷ نفر به چند طریق می توانند در یک ردیف روی ۷ صندلی کنار هم بنشینند به طوری که یک نفر به خصوص همواره روی صندلی وسط نشسته باشد؟

$$6 \times 6! \quad (4)$$

$$3 \times 6! \quad (3)$$

$$6! \quad (2)$$

$$7! \quad (1)$$

۲۱

رضا می خواهد یک کتاب ریاضی و پنج کتاب درسی دیگرش را روی هم بچیند. در چند حالت مختلف هنگام چیدن کتابها، کتابهای بیشتری بالای کتاب ریاضی قرار می گیرد؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۳ داخل**

$$200 \quad (4)$$

$$240 \quad (3)$$

$$300 \quad (2)$$

$$360 \quad (1)$$

۲۲

۵ نفر می خواهند روی ۶ صندلی بنشینند. چند حالت ممکن است که روی پنج صندلی متوالی بنشینند؟

$$5! \quad (4)$$

$$6 \times 5! \quad (3)$$

$$4 \times 5! \quad (2)$$

$$2 \times 5! \quad (1)$$

۲۳

۵ دانشجو و ۴ دانش آموز به چند روش می توانند کنار هم در یک ردیف بنشینند به طوری که یک در میان دانشجو و دانش آموز نشسته باشند؟

$$5! + 4! \quad (۴)$$

$$2 \times 5! 4! \quad (۳)$$

$$5! 4! \quad (۲)$$

$$9! \quad (۱)$$

۲۴

۴ ایرانی و ۴ هندی به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف بنشینند که یک در میان ایرانی و هندی نشسته باشند؟

$$4! + 4! \quad (۴)$$

$$2 \times 4! 4! \quad (۳)$$

$$4! 4! \quad (۲)$$

$$8! \quad (۱)$$

۲۵

چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل

$$2400 \quad (۴)$$

$$2160 \quad (۳)$$

$$1920 \quad (۲)$$

$$1840 \quad (۱)$$

۲۶

۴ کتاب متمایز با عنوان ریاضی و ۳ کتاب متمایز با عنوان فیزیک را به چند طریق می توان روی هم قرار داد به طوری که وقتی آن ها را یکی یکی برمی داریم تا در گوشه دیگر اتاق روی هم بچینیم ترتیب عنوان کتاب ها (ریاضی و فیزیک) مانند قبل باشد؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۲ خارج

۱۴۴ (۴)

۳۱۵ (۳)

۴۳۲ (۲)

۶۳۰ (۱)

۲۷

۵ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد روی ۵ صندلی به ۵ رنگ مختلف بنشینند؟

۱ (۴)

۴! (۳)

۵! (۲)

۵ (۱)

۲۸

۳ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد روی ۷ صندلی به ۷ رنگ مختلف بنشینند؟

۲۱۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۵ (۲)

۷ (۱)

۲۹

چهار نفر به اسامی a ، b ، c و d به چند طریق می توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

۶ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

۴ (۱)

۳۰

نتیجه

تعداد جایگشت های n شی متمایز دور یک مسیر بسته متقارن برابر است با: $(n - 1)!$

۵ بشقاب به رنگ های مختلف را به چند طریق می توان دور یک میز چید؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

۳۱

نکته

همیشه در حل مسائل جایگشت دور میز گرد (مسیر بسته متقارن) ، به دو نکته زیر توجه کنید:

۱- برای اولین شی همه مکان ها یکسان هستند به عبارت دیگر

اولین شی همواره فقط یک انتخاب دارد.

۲- با قرار گرفتن یک (یا چند) شی دور میز گرد، برای اشیای بعدی

مکان های بعدی متمایز هستند.

شش نفر شامل یک رئیس و یک منشی به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند به طوری که رئیس و منشی روبه روی هم بنشینند؟

$$2 \times 4! (4)$$

$$4! (3)$$

$$5! (2)$$

$$6! (1)$$

۳۲

پنج نفر می خواهند دور یک میز بنشینند. به چند طریق می توانند اگر دو نفر به خصوص همواره کنار هم بنشینند؟

$$4! (4)$$

$$2 \times 4! (3)$$

$$3! (2)$$

$$2 \times 3! (1)$$

۳۳

نکته

تعداد حالت های جابجایی n شی هنگامی که n_1 شی یکسان ، n_2 شی یکسان ، ...

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{و } n_k \text{ شی یکسان باشند برابر است با:}$$

با یک حرف a ، دو حرف b و سه حرف c چند کد شش حرفی می توان نوشت؟

$$60 (4)$$

$$30 (3)$$

$$120 (2)$$

$$90 (1)$$

۳۴

با ارقام عدد ۳۳۲۲۲۲۲ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

۳۵ (۴)

۲۱ (۳)

۱۴ (۲)

۷ (۱)

۳۵

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

۹۱۰ (۴)

۴۲۰ (۳)

۵۶۰ (۲)

۸۴۰ (۱)

۳۶

با ارقام عدد ۲۲۵۶۰ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

۴۲ (۴)

۴۸ (۳)

۵۶ (۲)

۶۰ (۱)

۳۷

با ارقام عدد ۳۴۴۴۶۰۰ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

۲۴۰ (۴)

۴۲۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

۳۸

نکته

- در مسائل جایگشت با دسته بندی اشیاء به ترتیب زیر عمل کنید:
- ۱- یک شکل در یک حالت مطلوب رسم کنید و اشیاء را با توجه به شرایط مسئله دسته بندی کنید.
 - ۲- ابتدا تعداد جایگشت های اشیای ظاهری را حساب کنید.
 - ۳- سپس تعداد جایگشت های اشیای داخل هر بسته را حساب کنید.

۵ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره آبی متمایز را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که مهره های قرمز کنار هم باشند؟

$$5! (4)$$

$$2 \times 4! (3)$$

$$4! \times 4! (2)$$

$$4! \times 5! (1)$$

۳۹

۵ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره آبی متمایز را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که مهره های هم رنگ کنار هم باشند؟

$$2! \times 4! \times 4! (4)$$

$$2! \times 3! \times 5! (3)$$

$$3! \times 5! (2)$$

$$2! (1)$$

۴۰

۵ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره آبی یکسان را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که مهره های قرمز کنار هم باشند؟

$$3 \times 5! \quad (4)$$

$$4! \times 5! \quad (3)$$

$$5! \quad (2)$$

$$4 \times 5! \quad (1)$$

۴۱

چهار زوج به سینما می روند. به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که هر کدام از آنان کنار زوج خود بنشینند؟

$$16 \times 4! \quad (4)$$

$$2 \times 4! \quad (3)$$

$$4! \quad (2)$$

$$4 \times 4! \quad (1)$$

۴۲

خانواده ای شامل پدر، مادر، ۳ فرزند، مادر بزرگ، خاله و دایی به سینما می روند به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که ۳ فرزند همواره بین پدر و مادر خود بنشینند؟

$$4! \cdot 3! \quad (4)$$

$$4! \cdot 5! \quad (3)$$

$$3! \cdot 3! \cdot 2! \quad (2)$$

$$4! \cdot 3! \cdot 2! \quad (1)$$

۴۳

با حروف کلمه AAABcdef چند کلمه هشت حرفی می توان نوشت که حروف کوچک همواره کنار هم باشند؟

۱۲۰ (۴)

۴۸۰ (۳)

۵۷۶ (۲)

۹۶ (۱)

۴۴

در دو طرف یک میز مستطیل شکل ۸ صندلی (در هر طرف ۴ صندلی) چیده شده است. ۴ زوج به چند روش می توانند روی

این صندلی ها بنشینند اگر هر نفر رو به روی زوج خود بنشینند؟

۴! (۴)

 $4! \times 16$ (۳)

 $4! \times 4$ (۲)

 $4! \times 2$ (۱)

۴۵

دور یک میز گرد ۸ صندلی چیده شده است. ۴ زوج به چند طریق می توانند روی این صندلی ها بنشینند اگر هر نفر کنار زوج

خود بنشینند؟

۴۸ (۴)

۹۶ (۳)

۲۴ (۲)

۷۲ (۱)

۴۶

دور یک میز گرد ۸ صندلی چیده شده است. ۴ زوج به چند طریق می توانند روی این صندلی ها بنشینند اگر هر نفر رو به روی زوج خود بنشینند؟

۷۲ (۱) ۲۴ (۲) ۹۶ (۳) ۴۸ (۴)

۴۷

در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارند. ۷ بیمار همزمان وارد مطب می شوند. به چند طریق بیماران می توانند روی این ۵ صندلی بنشینند به طوری که دو نفر از آنها نخواهند کنار هم بنشینند؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل**

۱۵۶۰ (۱) ۱۸۰۰ (۲) ۲۰۴۰ (۳) ۲۲۸۰ (۴)

۴۸

۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می کنند؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج

۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۹۶ (۴)

۴۹

تبدیل و ترکیب

نکته

تعداد حالت‌های انتخاب r شی از میان n شی متمایز ، هنگامی که با جابه جایی r شی انتخاب شده حالت‌های جدید به وجود آید یا r شی نقش‌های متفاوت داشته باشند

$$P(n, r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ برابر است با:}$$

که به آن **تعداد تبدیل‌های r شی از میان n شی متمایز** می‌گویند.

۳ باستان‌شناس به چند روش می‌توانند از میان ۸ شهر تاریخی ، هر کدام یک شهر انتخاب کنند و برای تحقیق به آن جا بروند؟

$$\frac{8!}{5! \times 3!} \quad (۴)$$

$$\frac{8!}{5!} \quad (۳)$$

$$\frac{8!}{3!} \quad (۲)$$

$$8^3 \quad (۱)$$

۵۰

۴ مهره رنگی به رنگ‌های مختلف را به چند طریق می‌توان در ۷ جعبه گذاشت به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره باشد؟

$$\frac{7!}{4! \times 3!} \quad (۴)$$

$$\frac{7!}{3!} \quad (۳)$$

$$\frac{7!}{4!} \quad (۲)$$

$$7^4 \quad (۱)$$

۵۱

نکته

تعداد حالت‌های انتخاب r شی از میان n شی متمایز، هنگامی که با جابه‌جایی اشیای انتخاب شده حالت جدیدی به وجود نیاید یا اشیای انتخاب شده نقش‌های متفاوتی

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} : \text{نداشته باشند برابر است با:}$$

که به آن **تعداد ترکیب‌های r شی از میان n شی متمایز** می‌گویند.

از میان ۵ دانشجوی داوطلب به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای عضویت در یک انجمن علمی انتخاب کرد؟

$$60 \quad (۴)$$

$$20 \quad (۳)$$

$$15 \quad (۲)$$

$$10 \quad (۱)$$

۵۲

از میان هفت مهره به رنگ‌های مختلف به چند طریق می‌توان چهار مهره انتخاب کرد؟

$$14 \quad (۴)$$

$$28 \quad (۳)$$

$$70 \quad (۲)$$

$$35 \quad (۱)$$

۵۳

برای انتخاب و اهدای ۳ جایزه از میان ۱۰ جایزه مختلف به شاگرد اول کلاس چند روش مختلف وجود دارد؟

- ۱۲۰ (۱) ۶۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۹۰ (۴)

۵۴

از میان ۷ کتاب مختلف به چند طریق می توان ۳ کتاب انتخاب کرد و به آدرس یک نفر پست کرد؟

- ۲۱ (۱) ۳۵ (۲) ۲۸ (۳) ۴۲ (۴)

۵۵

از میان ۹ ادویه مختلف به چند طریق می توانیم ۲ ادویه انتخاب کنیم و در غذا بریزیم؟

- ۱۸ (۱) ۲۸ (۲) ۴۵ (۳) ۳۶ (۴)

۵۶

از میان ۶ کتاب مختلف به چند طریق می توان ۲ کتاب یا ۴ کتاب انتخاب کرد؟

- ۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۱۸ (۴)

۵۷

نکته

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\binom{n}{2}$												

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \Rightarrow P(n, r) = r! \times C(n, r)$$

اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 28$ آنگاه حاصل $P(n, 2) + C(n, 2)$ چه قدر است؟

۲۸ (۴)

۸ (۳)

۸۴ (۲)

۵۶ (۱)

۵۸

حسین می خواهد از میان هفت نفر از دوستانش سه نفر را انتخاب کند تا در اسباب کشی خانه به او کمک کنند. او این کار را به چند طریق مختلف می تواند انجام دهد؟

۳۵ (۴)

۴۲ (۳)

۷۰ (۲)

۸۴ (۱)

۵۹

از میان ۵ مهره آبی متمایز و ۴ مهره قرمز متمایز، به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد؟

۸۰ (۴)

۴۲ (۳)

۴۰ (۲)

۸۴ (۱)

۶۰

از میان ۵ پزشک و ۶ مهندس به چند طریق می توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری که تعداد پزشک ها و مهندس های انتخاب شده با هم برابر باشد؟

۱۵۰ (۴)

۳۳۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۱۶۵ (۱)

۶۱

از میان ۴ دانش آموز و ۳ دانشجو به چند طریق می توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که حداقل ۲ دانش آموز انتخاب شده باشند؟

۱۱ (۴)

۲۴ (۳)

۲۲ (۲)

۱۰ (۱)

۶۲

نکته

تعداد زیرمجموعه های r عضوی مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{r}$

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

۱۴ (۴)

۲۱ (۳)

۳۵ (۲)

۲۸ (۱)

۶۳

تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی مجموعه A با تعداد زیرمجموعه های ۷ عضوی آن برابر است. مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

۲۱ (۴)

۵۱۲ (۳)

۱۰۲۴ (۲)

۱۰ (۱)

۶۴

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ای ۲ برابر زیرمجموعه‌های دو عضوی آن است. این مجموعه چند عضو دارد؟

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴)

۶۵

از میان ۴ ایرانی، ۴ آلمانی و ۴ آرژانتینی می‌خواهیم دو نفر را انتخاب کنیم به طوری که این دو نفر از یک ملیت نباشند. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

- ۳۶ (۱) ۱۶ (۲) ۶۴ (۳) ۴۸ (۴)

روش اول:

۶۶

روش دوم:

از میان ۵ زوج به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که هیچ زوجی میان افراد انتخاب شده نباشد؟

- ۵ (۱) ۱۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴)

۶۷

از میان ۴ ایرانی، ۴ آلمانی و ۴ آرژانتینی و ۵ فرانسوی می‌خواهیم سه نفر را انتخاب کنیم به طوری که این دو نفر از یک ملیت نباشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۱۴ (۴)

۱۲۴ (۳)

۸۰ (۲)

۹۶ (۱)

۶۸

نکته خیلی مهم

در حل مسائل ترکیبیات همواره می‌توانید از دستور زیر استفاده کنید :

اول انتخاب کن،

بعد جابه‌جا کن!

در مسابقات جام جهانی فوتبال در هر گروه مقدماتی ۴ تیم هستند. اگر هر دو تیم، یک بار با هم مسابقه بدهند آنگاه تعداد مسابقات در یک گروه چند تا است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

۶۹

اگر پنج قوطی رنگ به رنگ‌های سبز، قرمز، آبی، زرد و سفید داشته باشیم و با ترکیب هر سه رنگ مختلف بتوانیم یک رنگ جدید بسازیم آنگاه چند رنگ جدید می‌توان ساخت؟

۱۰ (۱) ۵ (۲) ۱۵ (۳) ۸ (۴)

۷۰

در یک مسابقه شطرنج تعدادی از دانش‌آموزان مدرسه شرکت کرده‌اند. اگر بین هر دو نفر سه مسابقه برگزار شده و تعداد کل مسابقات ۴۵ مسابقه باشد آنگاه تعداد شطرنج‌بازان چند نفر است؟

۷ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

۷۱

چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که در هر یک از آن‌ها رقم صدگان بزرگ‌تر از رقم دهگان و رقم دهگان بزرگ‌تر از رقم یکان باشد؟

۷۲۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۶۰ (۴)

۷۲

چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آن‌ها رقم یکان بزرگ‌تر از رقم دهگان و رقم دهگان بزرگ‌تر از رقم صدگان باشد؟

$$۱۲۶ (۴)$$

$$۲۲۰ (۳)$$

$$۸۴ (۲)$$

$$۱۲۰ (۱)$$

۷۳

از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

$$۹ (۴)$$

$$۸ (۳)$$

$$۷ (۲)$$

$$۶ (۱)$$

۷۴

پنج ریاضیدان و دو فیزیکدان می‌خواهند در یک سمینار علمی سخنرانی کنند. چند حالت وجود دارد اگر بین سخنرانی دو فیزیکدان فقط یک ریاضیدان سخنرانی کند؟

$$۵! ۲! (۴)$$

$$۵ \times ۴! ۲! (۳)$$

$$۵ \times ۵! ۲! (۲)$$

$$۵ \times ۵! (۱)$$

۷۵

پنج ریاضیدان و دو فیزیکدان می خواهند در یک سمینار علمی سخنرانی کنند. چند حالت وجود دارد اگر بین سخنرانی دو فیزیکدان دقیقاً دو ریاضیدان سخنرانی کند؟

۱۲۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۴۸۰ (۲)

۹۶۰ (۱)

۷۶

با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت که دقیقاً شامل دو رقم فرد باشد؟

۱۰۸۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۳۶۰۰ (۲)

۲۴۰۰ (۱)

۷۷

پنج ایرانی و دو هندی به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که هندی ها کنار هم نباشند؟

۳۶۰۰ (۴)

۲۴۰۰ (۳)

۲۴۴۰ (۲)

۳۶۶۰ (۱)

روش اول:

۷۸

روش دوم:

۵ ایرانی و ۳ هندی به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند که هیچ دو هندی کنار هم نباشند؟

- (۱) $20 \times 3! 5!$ (۲) $15 \times 3! 5!$ (۳) $10 \times 3! 5!$ (۴) $3! 5!$

۷۹

با حروف کلمه AABBBcde چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که هیچ دو حرف کوچک انگلیسی کنار هم نباشند؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴) ۳۶۰

۸۰

با حروف a, b, c, d و ارقام ۱، ۲ و ۳ چند کد می توان ساخت به طوری که دقیقاً دو رقم کنار هم باشند؟

- (۱) ۲۱۶۰ (۲) ۲۴۰۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۸۸۰

۸۱

از میان ۵ نفر به اسامی a, b, c, d, e به چند طریق می توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که a حتماً انتخاب شود؟

۱۵ (۴)

۴ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

۸۲

از میان ۵ نفر به اسامی a, b, c, d, e به چند طریق می توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که b انتخاب نشود؟

۱۰ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۸۳

از میان ۵ نفر به اسامی a, b, c, d, e به چند طریق می توان ۳ نفر انتخاب کرد که a انتخاب شود و b انتخاب نشود؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۸۴

با حروف کلمه computer چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که شامل همه حروف صدادار انگلیسی باشد؟

$$20 \times 5! \quad (4)$$

$$20 \quad (3)$$

$$10 \times 5! \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

۸۵

رئیس یک اداره می خواهد از میان ۸ نفر از کارمندانش ۴ نفر را به یک دوره آموزشی بفرستد. به چند طریق می تواند این ۴ نفر را انتخاب کند اگر بداند که دو نفر از کارمندان به دلایل اداری نمی توانند همزمان در این دوره آموزشی شرکت کنند؟

$$15 \quad (4)$$

$$55 \quad (3)$$

$$40 \quad (2)$$

$$35 \quad (1)$$

۸۶

بهاره می خواهد از میان ۹ نفر از دوستانش ۴ نفر را به جشن تولدش دعوت کند. به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد اگر بداند که دو نفر از دوستانش که خواهر یکدیگرند تنها در صورتی می آیند که با هم دعوت شوند؟

$$56 \quad (4)$$

$$35 \quad (3)$$

$$125 \quad (2)$$

$$21 \quad (1)$$

۸۷

نکته

فرض کنید که می‌خواهیم از میان n نفر شامل a ، می‌خواهیم r نفر را به تصادف انتخاب کنیم. می‌دانیم که این کار را می‌توانیم به $\binom{n}{r}$ حالت مختلف انجام دهیم. اینک اگر همه حالت‌های ممکن را در نظر بگیریم بدیهی است که در هر حالت a یا انتخاب شده است یا انتخاب نشده است. تعداد حالت‌هایی که a انتخاب شده برابر با $\binom{n-1}{r-1}$ و تعداد حالت‌هایی که a انتخاب نشده برابر با $\binom{n-1}{r}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

به این اتحاد ترکیبیاتی، **قاعده پاسکال** می‌گویند.

حاصل $\binom{12}{5} + \binom{12}{6}$ برابر است با:

$$\binom{13}{5} (1) \quad \binom{13}{6} (2) \quad \binom{13}{7} (3) \quad \binom{13}{8} (4)$$



حاصل $\binom{18}{8} + \binom{18}{9}$ برابر است با:

$$\binom{19}{8} (1) \quad \binom{19}{9} (2) \quad \binom{19}{10} (3) \quad \binom{19}{11} (4)$$



حاصل $\binom{29}{27} + \binom{27}{25} + \binom{28}{26} + \binom{29}{27}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) ۸۰۴۰ (۲) ۶۰۴۰ (۳) ۴۰۸۰ (۴) ۴۰۶۰

۹۰

حاصل $\binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{6} + \binom{14}{7}$ برابر با کدام است؟

(۱) $\binom{16}{8}$ (۲) $\binom{16}{7}$ (۳) $\binom{15}{7}$ (۴) $\binom{15}{6}$

۹۱

فصل دوم

احتمال

درس اول

مبانی احتمال

ما در تصمیم‌گیری‌های روزانه همواره با مسائلی درباره آینده مواجه می‌شویم و با توجه به این که در مورد آن چه در آینده رخ می‌دهد اطمینان نداریم نیاز به ابزارهایی داریم تا بتوانیم بر این مسئله‌ها غلبه کنیم. ابزارهای حل چنین مسائلی که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است علم آمار و علم احتمال است.

تعاریف اولیه علم احتمال

تعریف آزمایش تصادفی: آزمایشی را که نتیجه آن قبل از به وقوع پیوستن معلوم نباشد اما حالت‌های ممکن برای نتیجه آزمایش معلوم باشد، آزمایش تصادفی می‌نامند. مانند پرتاب یک تاس یا انتخاب تصادفی یک مهره از کیسه‌ای که محتویات آن معلوم است.

تعریف فضای نمونه آزمایش: به مجموعه همه حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه آن آزمایش می‌گویند. فضای نمونه یک آزمایش تصادفی به طور کلی به دو حالت فضای نمونه گسسته (شمارا) و فضای نمونه پیوسته (ناشمارا) دسته‌بندی می‌شود. یک فضای نمونه می‌تواند متناهی یا نامتناهی و هم شانس یا غیر هم شانس باشد.

تعریف پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می‌گویند. به عنوان تمرین در پرتاب یک تاس با فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هر یک از مجموعه‌های $A = \{2, 3, 5\}$ یا $B = \{4\}$ یا $C = \{1, 3, 5, 6\}$ یک پیشامد از این فضای نمونه هستند.

تعریف برآمد (رُخداد): به هر عضو فضای نمونه یک برآمد یا رُخداد می‌گویند.

تمرین: در پرتاب یک تاس، اگر عدد ۲ ظاهر شود آیا می‌توانیم بگوییم که پیشامد $\{1, 2, 3\}$ رخ داده است؟

نتیجه

با توجه به مفهوم رخ دادن یک پیشامد می توان نتیجه گرفت که:

الف) اگر پیشامد A زیرمجموعه پیشامد B باشد از رخ دادن A می توان رخ دادن B را نتیجه گرفت.

ب) رخ دادن پیشامد $A \cap B$ یعنی هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) رخ دادن پیشامد $A \cup B$ یعنی حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

تمرین: یک سکه را یک بار پرتاب می کنیم. فضای نمونه آزمایش را بنویسید. همه پیشامدهای این فضا را مشخص و درباره آنها بحث کنید.

تمرین: یک تاس سالم را یک بار پرتاب می کنیم. فضای نمونه این آزمایش را بنویسید. روی این فضای نمونه چند پیشامد می توان تعریف کرد؟ این فضای نمونه چند پیشامد ۴ عضوی دارد؟

یک نکته

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه S_1 و S_2 باشد فضای نمونه این آزمایش، مجموعه $S_1 \times S_2$ خواهد بود.
این نکته برای هر تعداد آزمایش همزمان نیز صادق است.

تمرین: یک سکه را دو بار پرتاب می کنیم. فضای نمونه آزمایش را بنویسید.

تمرین: برای فضای نمونه آزمایش تصادفی پرتاب دو سکه، چند پیشامد می توان در نظر گرفت؟

تمرین: خانواده ای سه فرزند دارد. فضای نمونه جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

تمرین: فضای نمونه جنسیت فرزندان خانواده ای که ۳ فرزند دارد چند پیشامد با ۲ عضو دارد؟

تمرین: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم). فضای نمونه اعداد روشده را بنویسید.

۶						
۵						
۴						
۳						
۲						
۱						
	۱	۲	۳	۴	۵	۶

تمرین: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. فضای نمونه این آزمایش را بنویسید.

تمرین: یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از ۴ مسافر نیز حرکت کند اما هرگز بدون مسافر حرکت نمی کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می افتد. فضای نمونه تعداد مسافران در دو مسیر رفت و برگشت را بنویسید.

سکه‌ای را ۷ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه این آزمایش چند عضو دارد؟

- ۱۲۸ (۱) ۱۴ (۲) ۴۹ (۳) ۷ (۴)

۱۷۸

تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه اعداد روشده ، چند عضو دارد؟

- ۶۵ (۱) ۵۶ (۲) ۳۰ (۳) ۳۰۰ (۴)

۱۷۹

نتیجه

اگر برای یک آزمایش تصادفی در یک بار آزمایش n حالت مختلف امکان پذیر باشد و این آزمایش را k بار تکرار کنیم، آن گاه فضای نمونه این آزمایش دارای n^k عضو است که هر عضو آن یک k تایی مرتب است.

اصول احتمال

برای هر پیشامد مثل A ، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می شود که عددی حقیقی در بازه $[0, 1]$ است. اصول احتمال عبارتند از:

$$\text{الف) } P(S) = 1$$

ب) برای هر دو پیشامد A و B اگر $A \cap B = \emptyset$ (در این شرایط می گوییم A و B ناسازگارند) داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

دو پیشامد ناسازگار، دو پیشامد هستند که رخ دادن همزمان آنها محال است. در غیر این صورت می گوییم A و B سازگارند.

تمرین: قضیه های زیر را ثابت کنید.

$$1- P(A') = 1 - P(A)$$

$$2- P(\emptyset) = 0$$

۳- اگر A ، B و C سه پیشامد دو به دو ناسازگار باشند آنگاه: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

۴- برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۵- برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

تمرین: مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱- دانش آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می کنید ،
 A : متولد ماه مهر باشد. B : متولد فصل تابستان باشد.

۲- سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم ،
 A : هر سه بار مشابه بیاید. B : زوج بار رو بیاید.

۳- فردا
 A : خورشید در آسمان دیده شود. B : باران ببارد.

۴- تاسی را پی در پی پرتاب می کنیم ،
 A : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید. B : تا پرتاب سپیم دو بار ۶ بیاید.

تمرین: در مسابقات جام جهانی فوتبال تیم های ملی ایران و بلژیک هم گروه هستن. بر اساس پیش بینی های کارشناسان فوتبال احتمال صعود به مرحله بعد برای تیم های ایران و بلژیک به ترتیب ۲۲ درصد و ۷۳ درصد و احتمال صعود همزمان دو تیم ۸ درصد است. مطلوب است احتمال آن که :

(۱) حداقل یک تیم صعود کند.

(۲) فقط بلژیک صعود کند.

(۳) فقط یک تیم صعود کند.

(۴) هیچ کدام صعود نکنند.

(۵) حداکثر یک تیم صعود کند.

تمرین های کتاب درسی

تمرین ۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه «سنگ، کاغذ، قیچی» بازی می کنند. فضای نمونه نتیجه این بازی را بنویسید. فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

تمرین ۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آن ها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن ها اهمیت داشته باشد فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند احتمال آن که اولین کسی که وارد می شود بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

تمرین ۳ در یک ایستگاه هواشناسی در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت هوا را به این شکل خلاصه می کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می وزد یا نمی وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی، فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضاچند عضو دارد؟

تمرین ۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را اثبات کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ آن گاه: $P(A - B) = P(A) - P(B)$

ب) اگر $B \subseteq A$ آن گاه: $P(A - B) = P(A) - P(B)$

تمرین ۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:
الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر بخش پذیر باشد نه بر ۳.

درس دوم

احتمال غیر هم شانس

تعریف

هر گاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند S را **فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم شانس** می‌گوییم.

اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ پیشامدی از این فضای نمونه باشد آن گاه خواهیم داشت:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

تمرین: یک تاس همگن طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی یک وجه آن عدد ۳ نوشته شده است. اگر این تاس را یک بار پرتاب کنیم:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) احتمال آن که در یک بار پرتاب این تاس عدد ۱ ظاهر شود چقدر است؟

پ) احتمال آن که در یک بار پرتاب این تاس عدد ۲ ظاهر شود چقدر است؟

ت) احتمال آن که در یک بار پرتاب این تاس عدد ۳ ظاهر شود چقدر است؟

ث) احتمال آن که در یک بار پرتاب این تاس عدد ۱ یا ۲ ظاهر شود چقدر است؟

تمرین: در یک مسابقه فوتبال با حضور چهار تیم a ، b ، c و d احتمال قهرمانی تیم a ، b و c با هم برابر است ولی احتمال قهرمانی تیم d دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر است. احتمال قهرمانی هر تیم را حساب کنید.

تمرین: در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه $S = \{x, y, z\}$ اگر $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$ باشد احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را حساب کنید.

تمرین: تاسی ناهمگن طوری ساخته شده که شانس رو شدن هر عدد زوج سه برابر شانس رو شدن هر عدد فرد است.
 الف) احتمال رخ دادن هر یک از وجه ها را حساب کنید.
 ب) در پرتاب این تاس احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ چقدر است؟

تمرین: تاسی ناهمگن طوری ساخته شده که شانس رو شدن هر وجه ، با عدد روی آن وجه متناسب است. این تاس را یک بار پرتاب می کنیم. احتمال آنکه عدد رو شده ، عددی فرد باشد چقدر است؟

تمرین: اگر در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ باشد و احتمال رخ دادن برآمد a_k از رابطه

$$P(a_k) = \frac{\binom{5}{k-1}}{m}$$

به دست آید آن گاه:

الف) مقدار m را بیابید.

ب) احتمال رخ دادن a_4 چقدر است؟

پ) احتمال رخ دادن پیشامد $A = \{a_1, a_2\}$ چقدر است؟

تمرین: اگر در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ باشد و احتمال رخ دادن برآمد a_k از رابطه

$$P(a_k) = \frac{\binom{6}{k}}{m}$$

به دست آید آن گاه:

الف) مقدار m را بیابید.

ب) احتمال رخ دادن a_5 چقدر است؟

پ) احتمال رخ دادن پیشامد $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ چقدر است؟

تمرین: اگر در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ باشد و احتمال رخ دادن برآمد a_k از رابطه

$$P(a_k) = m \times \binom{5}{k}$$

الف) مقدار m را بیابید.

ب) احتمال رخ دادن a_1 چقدر است؟

پ) احتمال رخ دادن پیشامد $A = \{a_2, a_3\}$ چقدر است؟

تمرین های کتاب درسی

تمرین ۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

تمرین ۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این که عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کند.

تمرین ۳ $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی است. اگر $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

تمرین ۴ در یک تجربه تصادفی $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$, $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از پیشامدها را به دست آورید.



تمرین ۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل روبه رو که به ۵ ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه k ام برابر با $x(2k - 1)$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است یا اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

درس سوم

احتمال شرطی

در مسائلی که با عدم قطعیت و احتمال سر و کار داریم گاهی با سؤال‌های شرطی مواجه هستیم. به عنوان مثال:

«اگر راننده‌ای از کمربند ایمنی استفاده نکند چقدر احتمال دارد که در یک تصادف، دچار نقص عضو شود؟»

«اگر ارلینگ هالند مصدوم باشد احتمال آن که تیم منچستر سیتی در مسابقه بعدی پیروز شود چقدر است؟»

«اگر معدل کل نمرات دانیال در امتحانات نهایی پایه دوازدهم، برابر $\frac{16}{5}$ باشد احتمال آن که در کنکور سراسری رتبه‌ای پایین‌تر

از ۱۰۰۰ کسب کند، چقدر است؟»

در همه این موارد با دو پیشامد سر و کار داریم و فرض می‌کنیم که یکی از آن‌ها رخ داده است و می‌خواهیم احتمال رخ دادن دیگری را حساب کنیم و بررسی کنیم که چه تغییری کرده است.

تمرین: در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند. شماره کارت نرگس ۱۶ و شماره کارت پویا ۵ است.

الف) احتمال این که نرگس انتخاب شود چقدر است؟ احتمال این که پویا انتخاب شود چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند قبل از آن که به دیگران نشان دهد می‌گوید: «شماره برنده، دو رقمی است.» حالا نرگس و پویا هر کدام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

تمرین: در یک مسابقه علمی بین‌المللی ۱۳ ایرانی، ۱۵ هندی و ۲۲ ژاپنی شرکت کرده‌اند و از این افراد ۷ ایرانی، ۵ هندی و ۸ ژاپنی موفق به کسب نمره قبولی شده‌اند. اگر از میان این افراد یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم:

الف) احتمال آن که فرد انتخاب شده نمره قبولی کسب کرده باشد چقدر است؟

ب) احتمال آن که فرد انتخاب شده ایرانی باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که فرد انتخاب شده ایرانی است احتمال آن که نمره قبولی کسب کرده باشد چقدر است؟

تمرین: یک تاس همگن را یک‌بار پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال آن که عدد ۲ بیاید چه قدر است؟

ب) اگر بدانیم که عددی زوج رو شده است آن‌گاه احتمال آن که عدد ۲ آمده باشد چه قدر است؟

در حالتی که فضای نمونه S هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد به رخ دادن پیشامد A مانند این است که فضای نمونه S را کنار بگذاریم و A را به عنوان فضای نمونه در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه جدید نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» و به A ، **فضای نمونه کاهش یافته** یا **فضای نمونه محدود شده** می‌گوییم.

تمرین: در پرتاب یک تاس اگر بدانیم که عدد رو شده عددی اول است، احتمال آن که عددی فرد باشد چقدر است؟

تمرین: در پرتاب دو تاس اگر بدانیم یکی از اعداد رو شده ۴ است احتمال آن که حاصل جمع دو عدد رو شده برابر با ۷ باشد چقدر است؟

تمرین: در پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل جمع دو عدد رو شده برابر با ۸ است احتمال آن که هر دو عدد رو شده، اعدادی زوج باشند چقدر است؟

تمرین: در پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل جمع دو عدد بیشتر از ۹ است احتمال آن که دست کم یک بار ۶ آمده باشد چقدر است؟

قضیه

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند و بدانیم که پیشامد A رخ داده است آن‌گاه احتمال آن که پیشامد B رخ داده باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

تمرین: سکه ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت احتمال این که هر دو بار رو آمده باشد چقدر است؟

تمرین: سکه ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت احتمال این که هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

تمرین: دو تاس سبز و قرمز را با هم پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است احتمال این که تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است احتمال این که مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

تمرین: تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن ها را به تصادف انتخاب کنیم

الف) احتمال این که آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که از بازیکن اول کوتاه تر است. در این صورت احتمال این که بازیکن

اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

تمرین: در یک مدرسه سه کلاس پایه یازدهم ریاضی ۱-۱۱، ۲-۱۱ و ۳-۱۱ به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می کنیم. پیشامد «دانش آموز کلاس ۱-۱۱ بودن» را B_1 می نامیم و B_1 و B_1 را به طور مشابه تعریف می کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می دهیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i = 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i = 1, 2, 3$ محاسبه کنید. معنای آن چه محاسبه کرده اید چیست؟

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق تر می دانید؟ برای پاسخ دادن به این سوال، پاسخ قسمت الف مهم تر است یا پاسخ قسمت ب؟

تمرین: فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت است. نشان دهید:

الف) اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

ب) برای هر پیشامد A داریم: $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

تمرین: اگر $P(A) = \frac{2}{5}$ ، $P(B) = \frac{1}{7}$ و $P(A \cap B) = \frac{3}{35}$ آن گاه مطلوب است احتمال آن که :

الف) B رخ داده باشد اگر بدانیم که A رخ داده است.

ب) B رخ نداده باشد اگر بدانیم که A رخ داده است.

پ) B رخ داده باشد اگر بدانیم که A رخ نداده است.

ت) B رخ نداده باشد اگر بدانیم که A رخ نداده است.

قانون ضرب احتمال

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

اثبات:

اگر A ، B و C سه پیشامد با احتمال ناصفر از فضای نمونه S باشند آنگاه:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

اثبات:

تمرین: در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از این کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جای گذاری خارج می کنیم. احتمال این که گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد چقدر است؟

تمرین: در تمرین قبل اگر سه گوی را به ترتیب و بدون جای گذاری خارج کنیم احتمال آن که اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

تمرین: بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می کند، اگر روحیه خوبی داشته باشد پرتابش به احتمال $0/9$ گل می شود و اگر روحیه اش ضعیف باشد احتمال گل شدن پرتابش $0/6$ است. به علاوه می دانیم که او اگر پرتابی را گل کند در پرتاب بعدی روحیه خوبی دارد و در غیر این صورت روحیه اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید این بسکتبالیست پیش از اولین پرتاب روحیه خوبی داشته باشد، احتمال این که از ۳ پرتاب متوالی دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

تمرین: فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگر قرمز است. کارتی را به تصادف برمی داریم و مشاهده می کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال آن که هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

تمرین: احتمال حضور یونس و بابک در یک سمینار علمی به ترتیب $0/7$ و $0/6$ است. اگر یونس به این سمینار برود بابک با احتمال $0/5$ به این سمینار می رود. اگر بدانیم که بابک به این سمینار نرفته است احتمال آن که یونس نیز به این سمینار نرفته باشد چقدر است؟

تمرین: در یک آزمایش تصادفی احتمال رخ دادن پیشامد A برابر ۰/۱۹، احتمال رخ دادن پیشامد B برابر ۰/۲۵ و احتمال رخ دادن A با آگاهی از رخ دادن B برابر با ۰/۱۶ است. اگر بدانیم که اگر بدانیم که A رخ داده احتمال آن که B رخ نداده باشد کدام است؟

افراز یک مجموعه

منظور از افراز یک مجموعه، تقسیم آن به چند زیرمجموعه ناتهی است به طوری که:
(الف) زیرمجموعه ها دو به دو با هم اشتراکی نداشته باشند. (ب) اجتماع زیرمجموعه ها برابر با مجموعه اصلی باشد.

به عبارت دیگر می گوییم مجموعه A به زیرمجموعه های ناتهی $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ افراز شده است هرگاه:

$$\forall i, j (i \neq j) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n = A$$

کدام گزینه یک افراز برای مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است؟

- (۱) $\{1, 4\}$ و $\{2, 4, 5\}$ و $\{3, 6\}$ و $\{1, 5\}$
 (۲) $\{1, 5\}$ و $\{2, 4, 6\}$ و $\{3, 6\}$ و $\{1, 2\}$
 (۳) $\{1, 5\}$ و $\{2, 3, 6\}$ و $\{2, 5\}$ و $\{3, 6\}$
 (۴) $\{1, 2\}$ و $\{2, 5\}$ و $\{3, 6\}$ و $\{1, 2\}$



تمرین: تمام افرازهای یک مجموعه ۲ عضوی را بنویسید.

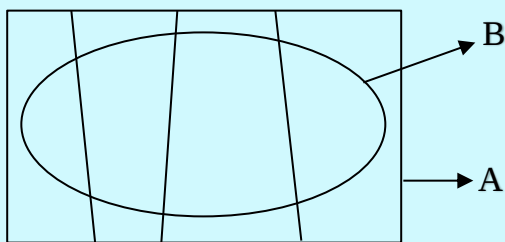
تمرین: تمام افرازهای یک مجموعه ۳ عضوی را بنویسید.

تمرین: تمام افرازهای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را بنویسید که اعداد ۳ و ۴ در یک مجموعه باشند.

قانون احتمال کل

قضیه

اگر فضای نمونه A به n مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده باشد و مطابق شکل B پیشامدی از این فضای نمونه باشد آن گاه خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum P(A_k)P(B|A_k) \end{aligned}$$

تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه اول ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف برمی‌داریم. احتمال آنکه این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

نتیجه

اگر فضای نمونه را به دو پیشامد A و A' افراز کنیم آن گاه ساده ترین شکل قانون احتمال کل به صورت زیر بیان می شود:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$$

تمرین: در یک شهر ۸۰ درصد افراد بالای ۶۰ سال واکسن کرونا تزریق کرده اند. بر اساس آمار احتمال ابتلا به ویروس کرونا در میان کسانی که واکسن زده اند ۰/۲ درصد و در میان کسانی که واکسن نزده اند ۹ درصد است. احتمال این که یک فرد بالای ۶۰ سال در این شهر به کرونا مبتلا شود چقدر است؟

تمرین: دسته ای کارت شامل دو کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز یک رو قرمز داریم. کاردی را به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و یک روی آن را می بینیم. احتمال آن که این رو قرمز باشد چقدر است؟

تمرین: سه جعبه داریم. در جعبه اول ۳ مهره آبی و ۱ مهره قرمز، در جعبه دوم ۱ مهره آبی و ۲ مهره قرمز و در جعبه سوم ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز است. ابتدا یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس یک مهره به تصادف برمی‌داریم. اگر شانس انتخاب شدن جعبه اول ۳ برابر هر یک از جعبه های دوم و سوم باشد آن گاه احتمال آن که مهره انتخاب شده، مهره قرمز باشد چقدر است؟

تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه اول ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. تاسی سالم را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده کوچکتر از ۳ باشد یک مهره از جعبه اول و در غیر این صورت یک مهره از جعبه دوم برمی‌داریم. احتمال آنکه این مهره قرمز باشد چقدر است؟

تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه اول ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. یک مهره به تصادف از جعبه اول برمی‌داریم و بدون مشاهده در جعبه دوم می‌گذاریم. سپس از جعبه دوم یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

در یک کارخانه ۲۰ درصد محصولات در کارگاه A، ۴۵ درصد در کارگاه B و بقیه در کارگاه C تولید می شوند. احتمال معیوب بودن محصولات این کارگاه ها به ترتیب ۵ درصد، ۸ درصد و ۱۰ درصد است. اگر محصولی از این کارخانه بخریم احتمال آن که معیوب باشد چقدر است؟

$$0.091 \quad (4)$$

$$0.081 \quad (3)$$

$$0.083 \quad (2)$$

$$0.093 \quad (1)$$



تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه اول ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. یک جعبه به تصادف انتخاب می کنیم و ۲ مهره به تصادف از آن خارج می نماییم. احتمال آنکه این مهره ها هم رنگ نباشند، چقدر است؟

تمرین: در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۷ مهره آبی است. یک مهره از جعبه برمی داریم و بدون مشاهده، آن را خارج جعبه می گذاریم. سپس به تصادف یک مهره دیگر از این جعبه انتخاب می کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟

تمرین: هر کدام از حالت‌های ممکن برای اعداد رو شده در پرتاب دو تاس را روی یک کارت می‌نویسیم و همه کارت‌ها را در یک جعبه قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از جعبه برمی‌داریم و بدون مشاهده بیرون جعبه می‌گذاریم. حالا اگر یک کارت دیگر از جعبه برداریم احتمال آن که حاصل جمع اعداد روی کارت برابر ۱۱ باشد چقدر است؟

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۷ مهره آبی است. دو مهره از جعبه برمی‌داریم و بدون مشاهده، آنها را در یک کیسه می‌گذاریم. سپس به تصادف یک مهره از این کیسه انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

$$\frac{3}{10} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{10} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{9} \text{ (۴)}$$

۱۸۲

تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه اول ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز است. به تصادف و بدون مشاهده دو مهره از جعبه اول و سه مهره از جعبه دوم برمی‌داریم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس از این کیسه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن که این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

تمرین: سه جعبه داریم. در جعبه اول ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز، در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و در جعبه سوم ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز هست. به تصادف و بدون مشاهده سه مهره از جعبه اول و دو مهره از جعبه دوم برمی داریم و در جعبه سوم قرار می دهیم. سپس از جعبه سوم یک مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را به n مجموعه افراز می کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$$

ساده ترین حالت قانون بیز وقتی است که $n = 2$ باشد. در این صورت B_1 و B_2 دو پیشامد متمم اند:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

تمرین: سه جعبه داریم. در جعبه اول ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز، در جعبه دوم ۵ مهره آبی و ۱ مهره قرمز و در جعبه سوم ۱ مهره آبی و ۳ مهره قرمز است. یک جعبه به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره به تصادف از آن برمی داریم. اگر بدانیم مهره خارج شده قرمز است احتمال آن که از این مهره از جعبه اول بوده باشد، چقدر است؟

تمرین: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز و یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم قرمز است. احتمال آن که روی دیگر این کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

تمرین: میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال آن که یک سیب لکه‌دار باشد به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. اگر سیبی از یکی از صندوق‌ها به تصادف برداریم و مشاهده کنیم که لکه‌دار است احتمال آن که این سیب از صندوق متعلق به باغ شمالی باشد چقدر است؟

سه صندوق سیب داریم که هر کدام شامل ۱۰۰ سیب است. همه سیب‌های صندوق اول سبز و همه سیب‌های صندوق دوم قرمز است. در صندوق سوم ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی به تصادف انتخاب می‌کنیم و سیبی به تصادف برمی‌داریم. اگر ببینیم که این سیب سبز است احتمال آن که همه سیب‌های این صندوق سبز باشد چقدر است؟

$$\frac{51}{52} \quad (4)$$

$$\frac{48}{49} \quad (3)$$

$$\frac{49}{50} \quad (2)$$

$$\frac{50}{51} \quad (1)$$

۱۸۳

تمرین: سه ظرف داریم. در ظرف اول ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز، در ظرف دوم ۳ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در ظرف سوم ۳ مهره آبی و ۱ مهره قرمز هست. به تصادف و بدون مشاهده ۳ مهره از ظرف اول و ۲ مهره از ظرف دوم برمی داریم و در ظرف سوم قرار می دهیم. سپس از ظرف سوم یک مهره به تصادف خارج می کنیم. اگر این مهره قرمز باشد احتمال آن که متعلق به ظرف اول باشد، چقدر است؟

تمرین: در یک کارخانه شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است ۲ درصد از پاکت ها کمتر از ۳۰۰ سی سی شیر دارند ولی وقتی خط تولید به دلیل خراب شدن یکی از قطعات اصلی دچار عیب می شود این احتمال به ۱۰ درصد افزایش می یابد. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن آن قطعه در طول یک ماه ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده که خط تولید توسط مسئول فنی کارخانه بازدید و به طور کامل سرویس شده است. اگر امروز یک پاکت شیر را به تصادف انتخاب کنیم و مشاهده کنیم که حجم شیر داخل پاکت کمتر از ۳۰۰ سی سی است احتمال آن که خط تولید دچار عیب شده باشد چقدر است؟

تمرین های کتاب درسی

تمرین ۱ درباره خانواده ای چهار فرزندی می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آن ها پسر است. احتمال این که دقیقاً دو پسر داشته باشند چقدر است؟

تمرین ۲



ستاد مرکزی معاینه فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال پرکارترین سال در عرصه معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده اند. امسال یکی از سخت ترین سال های مبارزه با آلودگی هوا بود...»
در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه فنی خودروهای سبک را به عهده

داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شماره مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

تمرین ۳ بررسی های آماری نشان داده است که اگر یک روز هوا در ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز با احتمال $0/9$ هوای جزیره آرام و به احتمال $0/1$ طوفانی است و اگر در یک روز ساحل طوفانی باشد فردای آن روز با احتمال $0/5$ هوا آرام و با احتمال $0/5$ هوا طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد با چه احتمالی در دو روز بعد هوا طوفانی است؟

تمرین ۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را اثبات کنید: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

تمرین ۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

تمرین ۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد هستند. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را به تصادف از این روستا انتخاب کنیم احتمال این که گواهینامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

تمرین ۷ دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به تصادف برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

تمرین ۸ در شهری ۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال این که یک راننده مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن ها چنین تخلفی را با احتمال ۰/۰۱ انجام می دهند. احتمال این که یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

تمرین ۹ در دو جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از این جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آن که لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را حساب کنید.

تمرین ۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط رأی دادن در شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط رأی دادن در شهر B باشد و فردی به تصادف از میان رأی دهنده های این دو شهر انتخاب شود احتمال آن که از شهر A باشد چقدر است؟

تمرین ۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده برابر ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان واکسن زده باشند احتمال این که یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

تمرین ۱۲ قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

تمرین ۱۳ با فرض شرایط قانون احتمال کل ثابت کنید:

$$\min \{P(B|A_1), \dots, P(B|A_n)\} \leq P(A) \leq \max \{P(B|A_1), \dots, P(B|A_n)\}$$

تمرین ۱۴ فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار هستند و $P(A|B) \leq P(A|C)$ ثابت کنید:

$$P(A|B) \leq P(A|B \cup C) \leq P(A|C)$$

تمرین ۱۵ اکبر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند و در این تیم هیچ دو نفری هم قد نیستند. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است احتمال این که امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال این که امیر از نظر بلندی قد نفر نهم در تیم باشد چقدر است؟

تمرین ۱۶ علی و مازیار هر کدام به ترتیب با احتمال های $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد مازیار با احتمال $\frac{1}{8}$ به ورزشگاه می رود. فرض کنید علی به ورزشگاه رفته باشد با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه رفته است؟

تمرین ۱۷ خانم ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان های یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال این که این سه نفر صفحه ای که به آن ها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب $\frac{1}{90}$ ، $\frac{1}{95}$ و $\frac{1}{99}$ است. صفحه ای نسخه خوانی شده ولی هنوز غلط دارد. احتمال آن که مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

تمرین ۱۸ یک شرکت بیمه، بیمه‌گذاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است. گروه «پر خطر» که در یک سال با احتمال $0/4$ تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آن‌ها در یک سال $0/2$ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گذاران پرخطرند.

الف) احتمال آن که یک بیمه‌گذار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گذار در طول یک سال تصادف کرده باشد احتمال آن که جزو گروه پر خطر باشد چقدر است؟

درس چهارم

پیشامدهای مستقل و وابسته

تعریف

دو پیشامد را مستقل می گویند هرگاه آگاهی از رخ دادن یکی، احتمال رخ دادن دیگری را تغییر ندهد.

به عبارت دیگر A و B دو پیشامد مستقلند هرگاه : $P(B|A) = P(B)$
دو پیشامدی که مستقل نباشند را وابسته می گویند.

نتیجه

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و برعکس.

اثبات:

تمرین: در پرتاب دو تاس فرض کنید پیشامد A پیشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

تمرین: سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

تمرین: در پرتاب دو تاس، A را پیشامد ۳ در تاس اول و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل اند؟

تمرین: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند آنگاه $n(S)$ را بیابید.

تمرین: احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در این درس قبول شود را به دست آورید.

تمرین: در یک مسابقه تیراندازی احتمال این که محمد به هدف بزند $\frac{5}{7}$ و این احتمال برای مرتضی $\frac{7}{10}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند احتمال این که هر دو به هدف بزنند چقدر است؟



انتخاب‌های با جای گذاری و بدون جای گذاری

تمرین: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای گذاری بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن مهره دوم باشد،
الف) احتمال این که هر دو پیشامد رخ دهند چقدر است؟
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

تمرین: در تمرین قبل اگر مهره دوم را پس از جای گذاری مهره اول در جعبه بیرون آوریم با محاسبه $P(B|A)$ و $P(B)$ مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می شود.

سه پیشامد A ، B و C را مستقل می گوییم هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی n پیشامد A_1 ، A_2 و A_n را مستقل می گوییم هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آن ها برابر باشد.

تمرین: خانواده‌ای ۴ فرزند دارد:

الف) احتمال این که ۴ فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است؟

ب) احتمال این که فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند چقدر است؟

پ) احتمال این که دو فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است؟

تمرین: ۸۰ درصد افراد یک شهر باسوادند. اگر ۵ نفر از این شهر انتخاب کنیم احتمال این که هر ۵ نفر بیسواد باشند چقدر است؟

تمرین: سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر A احتمال مشاهده «رو» در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو «رو» به طور متوالی باشد مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

تمرین: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ آن گاه احتمال آن که پیشامدهای A و B با هم رخ دهند ، چه قدر است؟

تمرین: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ آن گاه $P(A \cup B)$ چقدر است؟

تمرین: A ، B و C سه پیشامد دو به دو مستقل از فضای نمونه S هستند. اگر $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.6$ و احتمال آن که حداقل یکی از این سه پیشامد رخ دهد برابر 0.904 باشد، احتمال رخ دادن پیشامد C چقدر است؟

نکته

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A و B' نیز مستقلند.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A' و B نیز مستقلند.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A' و B' نیز مستقلند.

اثبات:

تمرین: اگر $P(A) = \frac{7}{11}$ و $P(B|A) = P(B) = \frac{2}{5}$ آن گاه احتمال آنکه فقط A رخ دهد چقدر است؟

تمرین: اگر $P(A) = \frac{3}{8}$ و $P(B) = \frac{2}{7}$ و پیشامدهای A و B دو پیشامد مستقل باشند آن گاه احتمال آنکه نه A رخ دهد و نه B چقدر است؟

اگر $P(A') = \frac{5}{8}$ و $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و بدانیم A و B دو پیشامد مستقل هستند مقدار $P(B)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸۴

ارتباط پیشامدهای مستقل و ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آن گاه:

اگر A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل باشند آن گاه:

نتیجه

دو پیشامد A و B ، از دو ویژگی «ناسازگار بودن» و «مستقل بودن» هر کدام که باشند، دیگری نیستند.
یعنی: اگر دو پیشامد ناسازگار باشند مستقل نیستند و اگر مستقل باشند ناسازگار نیستند.

تمرین: در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس، دو پیشامد ناتهی مثال بزید که ناسازگار نباشند و مستقل باشند.

تمرین: در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس، دو پیشامد ناتهی مثال بزید که ناسازگار نباشند و مستقل نیز نباشند.

اگر $P(A) = 0.45$ ، $P(B) = 0.6$ و $P(A \cup B) = 0.78$ آن گاه پیشامدهای A و B

(۱) مستقل و ناسازگار هستند. (۲) مستقلند و ناسازگار نیستند.

(۳) ناسازگارند و مستقل نیستند. (۴) نه مستقلند و نه ناسازگار.

۱۸۵

تمرین های کتاب درسی

تمرین ۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه S باشند آیا A و B می توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

تمرین ۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیرمجموعه ناتهی باشند آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟

تمرین ۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.

الف) A' و B ب) A' و B'

تمرین ۴ در پرتاب دو تاس به طور پی در پی اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

تمرین ۵ از مجموعه اعداد طبیعی نابیشتر از ۱۰ یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

تمرین ۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $۰/۶$ و روی بیمار دیگر $۰/۸$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود مطلوبست احتمال این که:

(الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.

(ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.

(پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد.

تمرین ۱۱ یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال این که سکه «رو» و هر دو تاس ۶ بیاید چقدر است؟

تمرین ۱۲ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

(ب) تنها به ۵ سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

(پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

تمرین ۹ از یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن که:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند.

(ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

(پ) هر دو مهره هم‌رنگ باشند.

تمرین ۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

(ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

تمرین ۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم احتمال این که داروی ساخته شده روی همه افراد جواب منفی داشته باشد چقدر است؟

تمرین ۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$ ، حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.

تست‌های کنکور سراسری

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $A \subset B$ و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ آنگاه $P(B|A')$ کدام

است؟ **کنکور ۱۳۹۰ داخل**

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

۱۸۶

از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۱ داخل**

$$\frac{3}{7} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (3)$$

$$\frac{2}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{14} \quad (1)$$

۱۸۷

دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد. احتمال آن که شماره‌های یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۱ داخل**

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

۱ ۸ ۸

اعداد ۱، ۲، ... و ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟ **کنکور ۱۳۹۱ داخل**

$$\frac{2}{70} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{70} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{70} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{70} \quad (۱)$$

۱ ۸ ۹

از میان پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و هم چنین پنج مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره ۶ باشد با کدام احتمال دو مهره هم رنگ هستند؟

کنکور ۱۳۹۲ داخل

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

۱۹۰

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.7$ و $P(A \cap B') = 0.2$ آنگاه $P(A' \cap B)$

کدام است؟ کنکور ۱۳۹۲ داخل

$$0.5 \quad (4)$$

$$0.4 \quad (3)$$

$$0.3 \quad (2)$$

$$0.1 \quad (1)$$

۱۹۱

دو تاس را با هم می ریزیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده یک عدد اول است؟ **کنکور ۱۳۹۳ داخل**

$$\frac{7}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

۱۹۲

در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره یاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ **کنکور ۱۳۹۳ داخل**

$$0/24 \quad (4)$$

$$0/18 \quad (3)$$

$$0/15 \quad (2)$$

$$0/12 \quad (1)$$

۱۹۳

هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور متوالی و بدون جای گذاری مهره ها را از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد و زوج یک در میان خارج می شوند؟ **کنکور ۱۳۹۴ داخل**

$$0/2 \quad (4)$$

$$0/15 \quad (3)$$

$$0/12 \quad (2)$$

$$0/1 \quad (1)$$

۱۹۴

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز هست. اگر سه مهره ۱ این کیسه خارج کنیم با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟ **کنکور ۱۳۹۵ داخل**

$$\begin{array}{llll} \frac{17}{22} & (1) & \frac{19}{22} & (2) \\ \frac{39}{44} & (3) & \frac{41}{44} & (4) \end{array}$$

۱۹۵

در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دو تای آن‌ها معیوب هستند. به تصادف متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ‌های سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟

کنکور ۱۳۹۵ داخل

$$\begin{array}{llll} \frac{5}{8} & (1) & \frac{4}{21} & (2) \\ \frac{3}{14} & (3) & \frac{5}{21} & (4) \end{array}$$

۱۹۶

از بین مجموعه اعداد $\{۳۰۰، \dots، ۵۲، ۵۱\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد مضرب ۶ یا ۷ باشد ولی مضرب ۴۲ نباشد چقدر است؟ **کنکور ۱۳۹۵ داخل**

$$\begin{array}{llll} ۰/۲۵۲ & (1) & ۰/۲۵۵ & (2) \\ ۰/۳۵۲ & (3) & ۰/۳۵۵ & (4) \end{array}$$

۱۹۷

دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه رو یا تاس ۶ ظاهر می شود؟ **کنکور ۱۳۹۶ داخل**

$$\frac{7}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{8} \text{ (۱)}$$

۱۹۸

یک فضای نمونه متشکل از ۵ برآمد a, b, c, d و e است. اگر $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ باشد آنگاه

$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ چقدر است؟ **کنکور ۱۳۹۶ داخل**

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{8} \text{ (۱)}$$

۱۹۹

۶ عدد توپ تصادفی در ۳ جعبه متمایز انداخته شده اند. با کدام احتمال هیچ جعبه ای بدون توپ نمی ماند؟

کنکور ۱۳۹۶ داخل

$$\frac{7}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{7} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{14} \text{ (۱)}$$

۲۰۰

ظرف A شامل ۵ مهره با شماره‌های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره‌های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن‌ها از ۱۰ بیشتر است؟ **کنکور ۱۳۹۷ داخل**

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{65}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{75}$

۲۰۱

ظرف A شامل ۸ مهره از عدد ۱ تا ۸ و ظرف B دارای ۵ مهره از عدد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیشتر است؟ **کنکور ۱۳۹۷ داخل**

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۲۰۲

سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان موفق می‌شود؟ **کنکور ۱۳۹۷ داخل**

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{11}{12}$ (۴) $\frac{23}{24}$

۲۰۳

احمد و علی هر کدام با احتمال های به ترتیب $0/4$ و $0/3$ برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه می روند. اگر احمد به ورزشگاه رفته باشد علی با احتمال $0/7$ به ورزشگاه می رود. فرض کنید احمد به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی علی نیز به ورزشگاه

نرفته است؟ **کنکور ۱۳۹۷ خارج**

$$\frac{21}{25} \quad (4)$$

$$\frac{25}{28} \quad (3)$$

$$\frac{28}{29} \quad (2)$$

$$\frac{29}{30} \quad (1)$$

۲۰۴

سه سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال این که حداقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک رو یا تاس عدد زوج

باشد، کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۷ خارج**

$$\frac{11}{16} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{7}{12} \quad (2)$$

$$\frac{9}{16} \quad (1)$$

۲۰۵

در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ باشند آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

کنکور ۱۳۹۸ داخل

$$0/9 \quad (4)$$

$$0/85 \quad (3)$$

$$0/75 \quad (2)$$

$$0/7 \quad (1)$$

۲۰۶

امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه علمی شرکت می کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۸ خارج**

$$(1) \frac{9}{14} \quad (2) \frac{5}{7} \quad (3) \frac{11}{14} \quad (4) \frac{6}{7}$$

۲۰۷

در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی در پی و بدون جای گذاری از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره دوم سفید است؟ **کنکور ۱۳۹۸ خارج**

$$(1) \frac{1}{5} \quad (2) \frac{1}{6} \quad (3) \frac{1}{64} \quad (4) \frac{1}{72}$$

۲۰۸

در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه ای جدید می گذاریم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟ **کنکور ۱۳۹۸ داخل**

$$(1) \frac{5}{24} \quad (2) \frac{11}{48} \quad (3) \frac{13}{48} \quad (4) \frac{7}{24}$$

۲۰۹

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می شود. با کدام احتمال، این عدد مضرب ۳ یا ۵ است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

$$\frac{8}{15} \quad (4)$$

$$\frac{7}{15} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

۲۱۰

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**

$$\frac{13}{18} \quad (4)$$

$$\frac{25}{36} \quad (3)$$

$$\frac{11}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

۲۱۱

در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج می کنیم و در جعبه دوم می اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می آوریم. با کدام احتمال لااقل یکی از این دو مهره سفید است؟ **کنکور ۱۳۹۹ خارج**

$$\frac{23}{27} \quad (4)$$

$$\frac{38}{45} \quad (3)$$

$$\frac{34}{45} \quad (2)$$

$$\frac{20}{27} \quad (1)$$

۲۱۲

ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال آن که ارزش گزاره r نادرست باشد کدام است؟ **کنکور ۱۴۰۰ داخل**

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۱)$$

۲ ۱ ۳

ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. احتمال آن که q نادرست باشد کدام است؟ **کنکور ۱۴۰۰ خارج**

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۲ ۱ ۴

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۹ باشد به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم می اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با تعداد مهره های بیشتر انتخاب می کنیم.

احتمال این که این مهره قرمز باشد چقدر است؟ **کنکور ۱۴۰۰ داخل**

$$\begin{array}{llll} \frac{157}{270} \text{ (۱)} & \frac{165}{270} \text{ (۲)} & \frac{173}{270} \text{ (۳)} & \frac{180}{270} \text{ (۴)} \end{array}$$

۲۱۵

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم می اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با تعداد مهره های بیشتر انتخاب می کنیم.

احتمال این که این مهره آبی باشد چقدر است؟ **کنکور ۱۴۰۰ خارج**

$$\begin{array}{llll} \frac{7}{18} \text{ (۱)} & \frac{11}{30} \text{ (۲)} & \frac{19}{30} \text{ (۳)} & \frac{11}{18} \text{ (۴)} \end{array}$$

۲۱۶

از میان ۴ کارت به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد روی کارت انتخاب شده پرتاب می‌کنیم. اگر سکه ۲ بار رو بیاید احتمال آن که کارت شماره ۳ انتخاب شده باشد چقدر است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل

$$\frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{16} \text{ (۱)}$$

۲۱۷

فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال های $0/6$ و $0/4$ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آن‌ها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{16} \text{ (۱)}$$

۲۱۸

سه کیسه یکسان هر کدام شامل ۱۰ گوی در اختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه ای به تصادف انتخاب کرده و یک گوی خارج می‌کنیم. اگر ببینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های این کیسه قرمز است؟ **کنکور دی ماه ۱۴۰۱ داخل**

$$\frac{1}{16} (۱) \quad \frac{1}{12} (۲) \quad \frac{1}{8} (۳) \quad \frac{1}{4} (۴)$$

۲۱۹

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جای گذاری به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از گوی اول کمتر است با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل

$$\frac{1}{16} (۱) \quad \frac{1}{12} (۲) \quad \frac{1}{8} (۳) \quad \frac{1}{4} (۴)$$

۲۲۰

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد مقدار $P(B'|A')$ کدام است؟

(۱) $0/7$ (۲) $0/5$ (۳) $0/55$ (۴) $0/75$

کنکور دی ماه ۱۴۰۱ داخل

۲۲۱

در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ یک فضای نمونه است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدرنسبت کمتر از واحد تشکیل دهند و واسطه هندسی آنها $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S چقدر است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل

(۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ (۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ (۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$

۲۲۲

مجموعه $S = \{x, y, z, t, w\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و $A = \{x, y\}$ ، $B = \{x, y, z, t\}$ و $C = \{x, y, w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ باشد مقدار $P(C)$ کدام است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج

$\frac{11}{35}$ (۴)	$\frac{19}{35}$ (۳)	$\frac{16}{35}$ (۲)	$\frac{24}{35}$ (۱)
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

۲۲۳

در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش آموز، ۴۰ نفر فقط بلیط فیلم «الف» و ۷۵ نفر فقط بلیط فیلم «ب» را خریداری کرده اند. اگر $P(A)$ و $P(B)$ احتمال خرید فیلم های «الف» و «ب» باشند آنگاه بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

کنکور ۱۴۰۲ داخل

$\frac{15}{22}$ (۴)	$\frac{8}{15}$ (۳)	$\frac{38}{45}$ (۲)	$\frac{15}{29}$ (۱)
---------------------	--------------------	---------------------	---------------------

۲۲۴

اگر $P(A - B) = \frac{3}{7}$ و $P(B - A) = \frac{1}{7}$ آنگاه کمترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ **کنکور ۱۴۰۲ خارج**

(۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۲۵

چهار کارت به شماره‌های ۱ تا ۴ با احتمال متناسب با عدد نوشته شده روی آن‌ها در اختیار داریم. کارتی به تصادف انتخاب شده و سپس به تعداد عدد کارت، یک سکه پرتاب می‌شود. اگر سکه یک بار رو آمده باشد با کدام احتمال، سکه دقیقاً یک بار پرتاب شده است؟ **کنکور ۱۴۰۲ خارج**

(۱) $\frac{12}{19}$ (۲) $\frac{4}{13}$ (۳) $\frac{12}{23}$ (۴) $\frac{4}{29}$

۲۲۶

در جریان یک مسابقه بازیکن A دو پنالتی می زند. این بازیکن با احتمال ۶۰ درصد پنالتی اول را گل می کند. در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۸۰ درصد و در غیر این صورت ۳۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال وضعیت گل شدن دو پنالتی متفاوت است؟ **کنکور ۱۴۰۳ داخل**

$$0.3 \quad (4)$$

$$0.6 \quad (3)$$

$$0.24 \quad (2)$$

$$0.44 \quad (1)$$

۲۲۷

سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» بیاید ۲ سکه پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال همه سکه ها یکسان ظاهر می شوند؟ **کنکور ۱۴۰۳ داخل**

$$\frac{5}{16} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$\frac{3}{16} \quad (2)$$

$$\frac{3}{12} \quad (1)$$

۲۲۸

دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس ها عدد اول بوده و مجموع آن ها حداقل ۶ است؟

$$(۱) \frac{۲}{۹}$$

$$(۲) \frac{۵}{۹}$$

$$(۳) \frac{۱۱}{۱۸}$$

$$(۴) \frac{۱۳}{۱۸}$$

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ داخل

۲۲۹

دانش آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده اند. ۶۰ درصد از دانش آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده اند. اگر تعداد دانش آموزان مدرسه A، $\frac{۳}{۲}$ تعداد دانش آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

$$(۱) \frac{۹}{۱۶}$$

$$(۲) \frac{۷}{۱۶}$$

$$(۳) \frac{۵}{۸}$$

$$(۴) \frac{۳}{۸}$$

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ داخل

۲۳۰

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ، روابط $P(A-B) = P(A)P(B')$ و $P(A) = \frac{1}{6}P(B)$ برقرار است. اگر

$P(A' \cap B') = 0.25$ باشد، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$\frac{31}{40} \quad (4)$$

$$\frac{17}{20} \quad (3)$$

$$\frac{13}{20} \quad (2)$$

$$\frac{27}{40} \quad (1)$$

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴ داخل

۲۳۱

در یک کلاس ۱۵ نفره که هیچ دو نفری از آنها هم‌قد نیستند دو دانش آموز پشت سرهم به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که دومی از اولی کوتاه‌تر است. احتمال اینکه دانش آموز اول بلندترین عضو کلاس باشد، کدام است؟

$$0.1 \quad (4)$$

$$0.2 \quad (3)$$

$$0.3 \quad (2)$$

$$0.4 \quad (1)$$

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ داخل

۲۳۲

تیم ملی وزنه برداری، ۵ وزنه بردار در پنج وزن مختلف به مسابقات المپیک اعزام می کند. از بین آنها دو ورزشکار به تصادف پشت سرهم انتخاب کرده و مشاهده می کنیم که نفر دوم از نفر اول سنگین وزن تر است. احتمال اینکه نفر اول سبک وزن ترین عضو تیم باشد، کدام است؟

۰/۵ (۱)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۲ (۴)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ خارج

۲۳۳

فصل سوم

آمار توصیفی

درس اول

توصیف و نمایش داده‌ها

تعاریف اولیه

به واقعیت هایی درباره یک شی یا فرد که در محاسبه، برنامه ریزی و پیش بینی به کار می روند، **داده** می گویند.

به هر ویژگی از اشیا یا افراد که در اعضای یک جامعه یکسان نیستند و از عضوی به عضوی دیگر تغییر می کنند، **متغیر** می گویند.

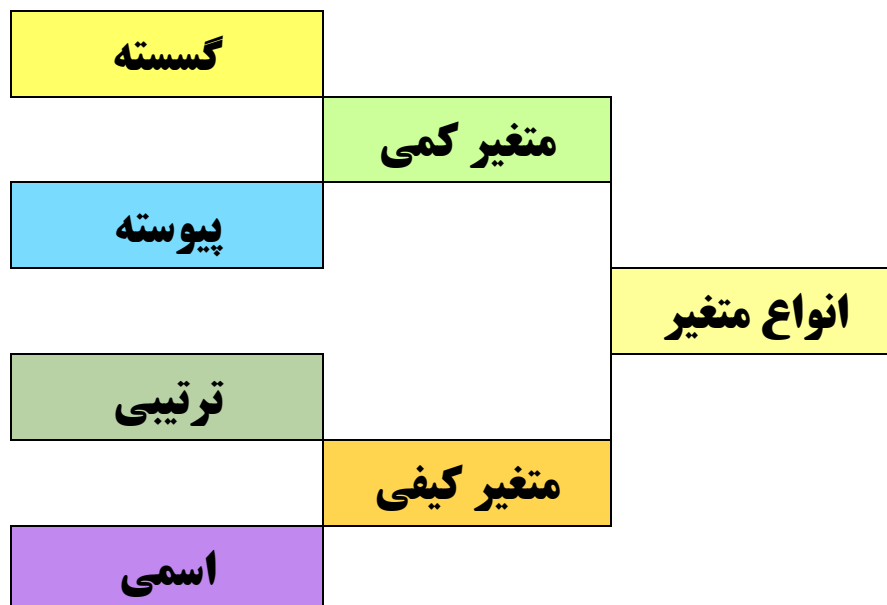
به عددی که به آن ویژگی نسبت داده می شود **مقدار متغیر** یا به اصطلاح **مشاهده** گفته می شود.

به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می خواهیم در مورد آن ها داده ها را گردآوری کنیم، **جامعه آماری** و به تعداد عضوهای یک جامعه آماری، **اندازه جامعه** می گویند.

به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روش مشخصی انتخاب شده باشند، **نمونه** و به تعداد عضوهای یک نمونه، **اندازه نمونه** می گویند.

به عنوان مثال: می خواهیم نمرات درس ریاضیات گسسته دانش آموزان یک کلاس ۲۵ نفره را بررسی کنیم. برای این کار مثلاً ۸ نفر از آن ها را به عنوان نمونه انتخاب می کنیم و نمره درس ریاضیات گسسته آن ها را می پرسیم. در این حالت این ۲۵ دانش آموز جامعه آماری و ۸ دانش آموز انتخاب شده یک نمونه است و اندازه جامعه و اندازه نمونه به ترتیب ۲۵ و ۸ است. نمره ریاضیات گسسته دانش آموزان یک متغیر تصادفی است زیرا از یک نفر به یک نفر دیگر می تواند تغییر کند و به هر نمره نیز مقدار متغیر می گویند.

انواع متغیرها



متغیرها را به دو دسته **متغیرهای کمی** (قابل اندازه گیری) و **متغیرهای کیفی** (غیر قابل اندازه گیری) می توان تقسیم کرد.

متغیرهای کمی به دو زیرگروه **متغیرهای کمی گسسته** و **متغیرهای کمی پیوسته** دسته بندی می شوند.

به عنوان مثال: تعداد دانش آموزان کلاس، تعداد طبقات ساختمان، تعداد میوه های درختان سیب، درصد یک درس در آزمون های چهارگزینه ای و ... **متغیرهای کمی گسسته** هستند. وزن، قد، حجم، زمان، فشار هوا، قطر تنه درختان، میزان آلودگی هوا، میزان بارش باران، میزان مالیات، میزان درآمد فروش و ... **متغیرهای کمی پیوسته** هستند.

متغیرهای کیفی نیز به دو زیرگروه **متغیرهای کیفی ترتیبی** و **متغیرهای کیفی اسمی** دسته بندی می شوند.

به عنوان مثال: مقام های ورزشکاران در یک مسابقه ورزشی، مراحل رشد (کودکی، نوجوانی، جوانی، میانسالی و پیری)، میزان لذت از بازی، میزان سختی کار، میزان رضایت از غذا، مراحل تحصیل، درجه افسران نظامی و ... **متغیرهای کیفی ترتیبی** هستند. گروه خونی، رنگ چشم، جنسیت، ملیت، نوع آلودگی هوا، انواع گل های مغازه گل فروشی، انواع حساب های بانکی و ... **متغیرهای کیفی اسمی** هستند.

متغیرهای «جرم یک درخت»، «تعداد گل های یک بازیکن»، «جنسیت افراد» و «فصل های یک سال» به ترتیب از راست به چپ

چه نوع کمیت هایی هستند؟

(۱) **کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی اسمی - کیفی ترتیبی**

(۲) **کمی گسسته - کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کمی پیوسته**

(۳) **کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی ترتیبی - کمی گسسته**

(۴) **کمی پیوسته - کیفی ترتیبی - کیفی اسمی - کیفی ترتیبی**

قلمچی ۲۸ شهریور ۱۴۰۴

دسته بندی داده ها

تمرین: فرض کنید نمرات درس آمار و احتمال یک کلاس پایه یازدهم با ۲۴ دانش آموز به صورت زیر است:

۱۲، ۱۴، ۱۳/۵، ۲۰، ۲۰، ۱۹، ۱۶/۵، ۱۳، ۸، ۱۲، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۶/۵، ۱۸/۵، ۱۴، ۱۲، ۱۷/۵، ۴، ۱۵/۵، ۷/۵، ۱۲، ۱۵، ۱۳ و ۱۷

الف) این داده ها را در ۴ طبقه، دسته بندی کنید و جدول فراوانی این داده ها را بنویسید.

ب) کران پایین و کران بالای دسته سوم را مشخص کنید.

پ) مرکز دسته دوم را بیابید.

اگر ۱۲ داده ۳۳، ۲۲، ۱۹، ۲۴، ۱۸، ۲۷، ۲۸، ۲۵، ۲۶، ۲۰، ۱۹ و ۳۱ را در سه طبقه، دسته بندی کرده باشیم مرکز دسته سوم کدام است؟

۳۱/۵ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰/۵ (۲)

۳۰ (۱)

۲۳۵

۶۰ داده آماری در ۵ طبقه دسته بندی شده اند. اگر ۱۲ داده جدید به این داده ها اضافه کنیم فراوانی نسبی دسته دوم تغییری نمی کند. نسبت افزایش داده های دسته دوم به فراوانی اولیه آن کدام است؟

$$\frac{1}{5} (۱) \quad \frac{1}{6} (۲) \quad \frac{1}{8} (۳) \quad \frac{1}{4} (۴)$$

۲۳۶

تعدادی داده آماری در ۸ طبقه دسته بندی شده اند. اگر کران پایین دسته سوم برابر ۱۴ و مرکز دسته هفتم برابر ۵۹ باشد آنگاه مرکز دسته هشتم کدام است؟

$$۷۳ (۱) \quad ۷۱ (۲) \quad ۶۹ (۳) \quad ۶۷ (۴)$$

۲۳۷

فراوانی، فراوانی نسبی و درصد فراوانی نسبی

تعداد دفعاتی که هر داده تکرار یا مشاهده می شود **فراوانی** آن داده نامیده می شود و آن را با f نمایش می دهیم.

تعداد کل داده ها را **فراوانی کل** می گوئیم و آن را با n نشان می دهیم.

از تقسیم فراوانی هر داده به فراوانی کل، **فراوانی نسبی** آن داده مشخص می شود. فراوانی نسبی را با F نمایش می دهیم و خواهیم داشت: $F = \frac{f}{n}$. مجموع همه فراوانی های نسبی همواره برابر با ۱ است.

تمرین: فراوانی نسبی یک داده $0/24$ و فراوانی آن 36 است. تعداد کل داده‌ها چقدر است؟

تمرین: جدول فراوانی تعدادی از داده‌ها مطابق جدول مقابل است. فراوانی نسبی داده a کدام است؟

داده	a	b	c	d	e	f
فراوانی	4	3	7	9	2	2

تمرین: جدول فراوانی نسبی تعدادی از داده‌ها مطابق جدول مقابل است. اگر فراوانی داده d برابر با 12 باشد آن‌گاه فراوانی کل این داده‌ها کدام است؟

داده	a	b	c	d	e	f
فراوانی نسبی	$0/1$	$0/1$	$0/3$	x	$0/25$	$0/1$

اگر فراوانی نسبی داده‌ها را در 100 ضرب کنیم **درصد فراوانی داده‌ها** به دست می‌آید. درصد فراوانی داده‌ها را با P نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت: $P = F \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$. مجموع درصد فراوانی تمام داده‌ها همواره برابر با 100 است.

تمرین: در یک دانشگاه نمرات درس آمار و احتمال مهندسی در چهار سطح A ، B ، C و D به دانشجویان داده می‌شود. اگر در یک کلاس 15 نفر نمره A ، 18 نفر نمره B ، تعدادی نمره C و 12 نفر نمره D گرفته باشند و درصد فراوانی گروه C برابر 40 درصد باشد تعداد کل دانشجویان چند نفر است؟

انواع نمودارها

نمودار	کاربرد
نمودار میله‌ای	برای نمایش متغیرهای کمی گسسته و متغیرهای کیفی
نمودار دایره‌ای	برای نمایش متغیرهای کمی گسسته و متغیرهای کیفی
نمودار بافت نگاشت (هیستوگرام)	برای نمایش متغیرهای کمی گسسته
نمودار چندبر فراوانی (خط شکسته)	برای نمایش متغیرهای کمی گسسته

تمرین: در مورد این که مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می کنند تحقیقی صورت گرفته و نتایج زیر به دست آمده است. این جدول را کامل کنید:

مسافران قطار	شماره	فراوانی	فراوانی نسبی
مسافرانی که استراحت می کنند.	۱	۵۰	
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می کنند.	۲		۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می کنند.	۳	۱۵	
مسافرانی که غذا می خورند.	۴		۰/۱۰
تعداد کل مسافران		۱۰۰	

الف) نمودار میله‌ای فراوانی تعداد مسافران را رسم کنید.

ب) نمودار میله ای فراوانی نسبی تعداد مسافران را بر اساس جدول پر شده رسم کنید.

ت) نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی مسافران را رسم کنید.

تمرین: میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید:

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا AQI	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	۰ تا ۵۰	۱۶	
سالم	۵۰ تا ۱۰۰	۲۳۳	
ناسالم برای گروه‌های حساس	۱۰۰ تا ۱۵۰	۱۱۲	
ناسالم	۱۵۰ تا ۲۰۰	۴	
بسیار ناسالم	۲۰۰ تا ۲۵۰	۱۰	
خطرناک	۲۵۰ تا ۳۰۰	صفر	
تعداد کل روزهای یک سال		۳۶۵	

الف) نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها بر اساس وضعیت آلودگی هوا را رسم کنید.

ب) نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها بر اساس وضعیت آلودگی هوا را رسم کنید.

پ) چند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟

ت) چند درصد از روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟

ث) کدام نمودار در پاسخ دادن به این سوالات ما را بهتر راهنمایی می کند؟

تمرین: جدول فراوانی زیر مربوط به قد ۵۰ دانش آموز پایه یازدهم است. جاهای خالی جدول را پر کنید:

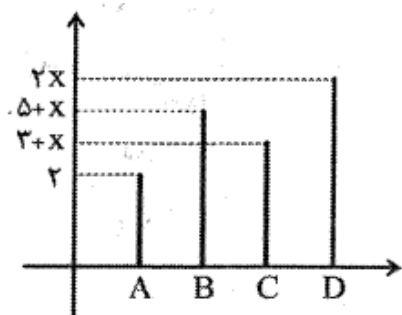
وضعیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
۱۲۰ تا ۱۳۰	۳	
۱۳۰ تا ۱۴۰	۱۰	
۱۴۰ تا ۱۵۰	۱۳	
۱۵۰ تا ۱۶۰	۱۱	
۱۶۰ تا ۱۷۰	۱۰	
۱۷۰ تا ۱۸۰		
مجموع	۵۰	

الف) بر اساس اعداد این جدول نمودار بافت نگاشت مربوط به فراوانی نسبی قد دانش آموزان را رسم کنید.

ب) قد چند درصد دانش آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی متر است؟

پ) قد چند درصد دانش آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی متر است؟

نمودار میله‌ای برای تعداد فروش محصولات A ، B ، C و D در یک فروشگاه به صورت مقابل است. اگر فراوانی نسبی تعداد فروش محصول B در این فروشگاه $\frac{3}{10}$ باشد زاویه مرکزی تعداد فروش محصول D در این نمودار دایره‌ای کدام است؟



(۱) ۱۱۲

(۲) ۱۲۸

(۳) ۱۴۴

(۴) ۱۵۶

سنجش ۳۱ فروردین ۱۴۰۳

۲۳۸

فعالیت



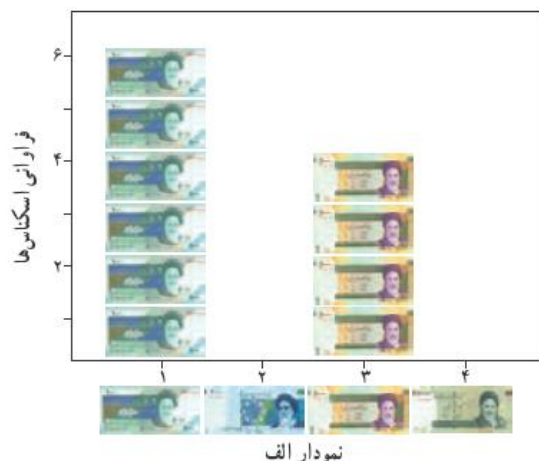
یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما به او کمک کنید تا این کار را انجام دهد.



- ۱ ابتدا به هر نوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.
- ۲ سپس به شمارش اسکناس‌ها بپردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.
- ۳ در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

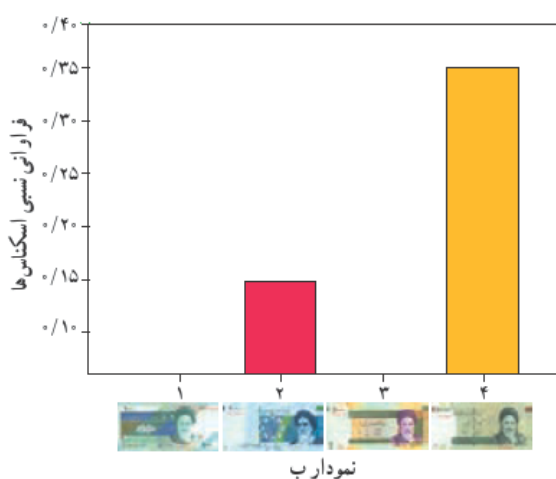
۴ با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی، چند درصد ۱۰۰۰ تومانی و چند درصد ۵ هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس تعداد کل اسکناس‌ها
	۱	۶	$\frac{۶}{۲۰}$
	۲		۰/۱۵
	۳	۴	
	۴		۰/۳۵
تعداد کل اسکناس‌ها		۲۰	



حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و پ نشان دهیم.

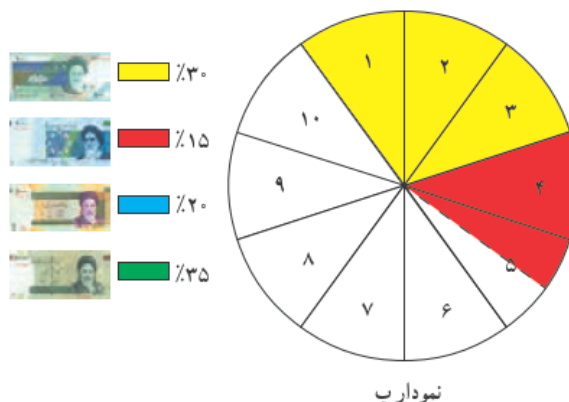
۱ در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده نوع اسکناس‌ها باشد. مطابق شکل، شما هم اسکناس‌های ۲ هزار تومانی را به صورت **۲** و اسکناس‌های ۱۰ هزار تومانی را به صورت **۱۰** در نمودار قرار داده و آن را کامل کنید.



۲ در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.

۳ اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟

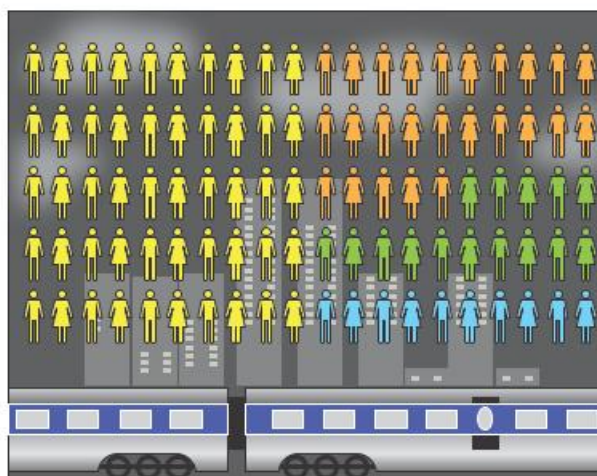
۴ برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان‌دهنده ۱۰ درصد کل دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی مربوط به اسکناس هزار تومانی، سه قسمت دایره رنگ زرد شده است که معادل ۳۰ درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس ۲ هزار تومانی، یک و نیم قسمت دایره رنگ قرمز شده است که معادل ۱۵ درصد کل دایره است. برای اسکناس‌های ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.



کار در کلاس

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

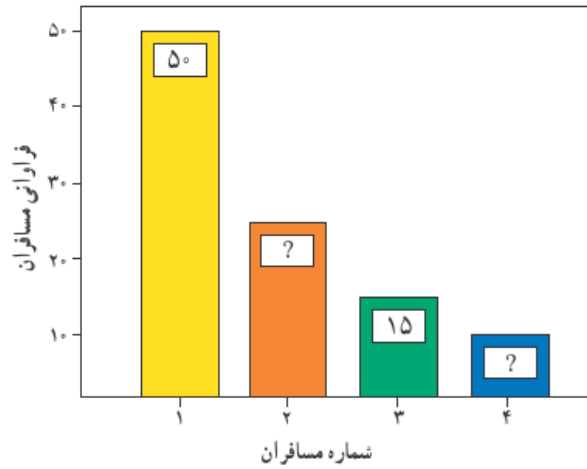
- در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می کنید.
- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار استراحت می کنند.
 - افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می کنند.
 - افرادی که با رنگ سبز مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار مطالعه می کنند.
 - افرادی که با رنگ آبی مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار غذا می خورند.



شکل ت

جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می کنند	۱	۵۰	
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می کنند	۲		۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می کنند	۳	۱۵	
مسافرانی که غذا می خورند	۴		۰/۱۰
تعداد کل مسافران		۱۰۰	



همچنین نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.

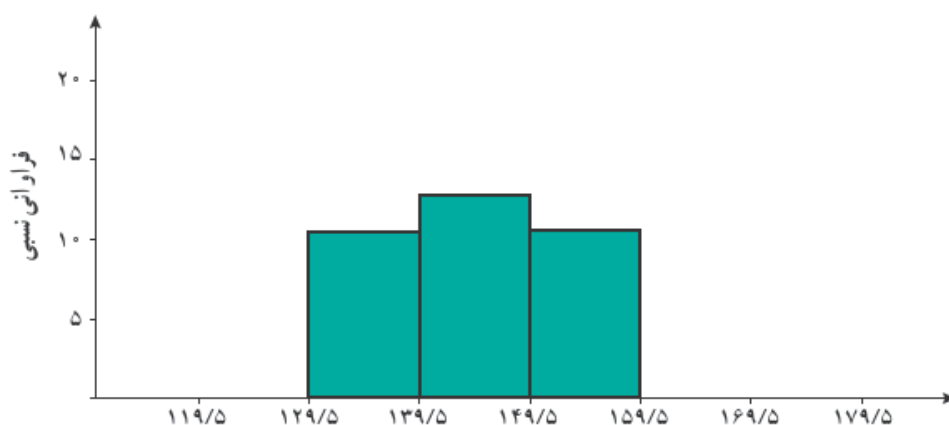
کار در کلاس



جدول فراوانی زیر مربوط به قد دانش آموز پایه یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

دسته ها	قد دانش آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی	کرانه ها
۱۲۰-۱۲۹	$120 \leq H < 130$	۳		[۱۱۹/۵-۱۲۹/۵]
۱۳۰-۱۳۹	$130 \leq H < 140$	۱۰		[۱۲۹/۵-۱۳۹/۵]
۱۴۰-۱۴۹	$140 \leq H < 150$	۱۳		[۱۳۹/۵-۱۴۹/۵]
۱۵۰-۱۵۹	$150 \leq H < 160$	۱۱		[۱۴۹/۵-۱۵۹/۵]
۱۶۰-۱۶۹	$160 \leq H < 170$	۱۰		[۱۵۹/۵-۱۶۹/۵]
۱۷۰-۱۷۹	$170 \leq H < 180$	۳		[۱۶۹/۵-۱۷۹/۵]
	مجموع	۵۰		

بر اساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت^۱ مربوط به فراوانی نسبی قد دانش آموزان را کامل کنید.



قد چند درصد از دانش آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی متر است؟ همچنین قد چند درصد از دانش آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی متر است؟

تمرین های کتاب درسی

۱ داده های زیر، مسافتی را که 20 راننده از مکان های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می کنند نشان می دهد. این داده ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

دسته ها	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
۶-۱۰	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	
۱۱-۱۵	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	
۱۶-۲۰	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	
۲۱-۲۵	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	
۲۶-۳۰	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	
۳۱-۳۵	از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	
۳۶-۴۰	از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	
	مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

☐ هر دو

☐ نمودار دایره‌ای

☐ نمودار میله‌ای

۳ جملات زیر را کامل کنید :

الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار..... استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای و استفاده می‌شود.

پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای و استفاده می‌شود.

۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایه یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟



O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، $\frac{1}{4}$ باشد و مجموع فراوانی های همه گروه های خونی برابر 20° در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

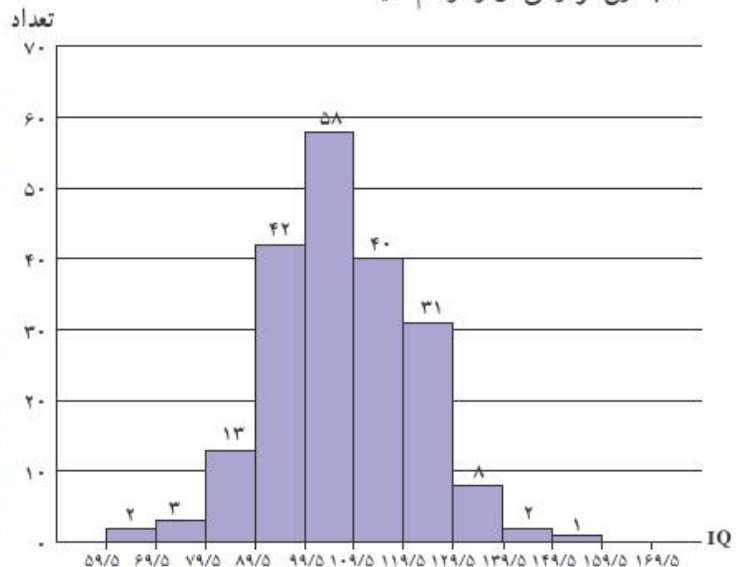
۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین 140° تا 160° هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید؟



۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به دست آورید؟

کیست این پنهان مراد در جان و تن کز زبان من همی گوید سخن^۱

درس دوم

معیارهای گرایش به مرکز

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داشته باشیم، مجموع آن‌ها را با نماد Σ (سیگما) نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

تعریف میانگین

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داشته باشیم آنگاه **میانگین** این داده‌ها که آن را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

تمرین: میانگین محیط و میانگین مساحت ۶ مربع به اضلاع ۲، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۹ را حساب کنید.

تعریف میانگین موزون

فرض کنید n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها دارای تعداد تکرار $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ باشند که به هر یک وزن داده متناظر با آن می‌گوییم. **میانگین موزون** این داده‌ها که آن را با $\bar{x}_w$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

تمرین: دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

الف) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش‌آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش‌آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

تمرین: نمرات چهار درس یک دانشجوی رشته مهندسی برق مطابق جدول زیر است. معدل این دروس را حساب کنید.

نام درس	ریاضی مهندسی	الکترومغناطیس	مدارهای اکتريکی	آزمایشگاه فیزیک حرارت
تعداد واحد	۳	۳	۳	۱
نمره	۱۶/۵	۱۲	۱۸/۵	۱۹

تمرین: میانگین ۲۰ داده آماری برابر با ۱۸/۷ است. مجموع تمام داده‌ها چقدر است؟

نتیجه

اگر n داده آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ داشته باشیم
آنگاه حاصل جمع تمام داده‌ها برابر است با:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}$$

نکته

اگر به همه داده‌ها عددی ثابت اضافه یا کم کنیم
به میانگین این داده‌ها نیز همان عدد اضافه یا کم می‌شود.

اثبات:

در یک نمونه‌گیری داده‌های ۱۵، ۱۹، ۱۵، ۱۶، ۱۲، ۱۴، ۱۳، ۱۳، ۱۷ و ۱۸ گردآوری شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴/۹ (۳)

۱۴/۸ (۲)

۱۵/۲ (۱)

۲۳۹

نکته

اگر همه داده‌ها را در عددی ثابت ضرب کنیم
میانگین این داده‌ها نیز در همان عدد ضرب می‌شود.

اثبات:

در یک کارگاه بسته‌بندی زعفران در یک نمونه‌گیری از وزن زعفران‌های دور ریخته شده بر حسب گرم در هنگام بسته‌بندی در پنج بسته ۱۰۰ گرمی داده‌های ۰/۹۷، ۰/۸۸، ۱/۲۳، ۰/۹۳ و ۱/۰۹ به دست آمده‌اند. میانگین وزن زعفران‌های از دست داده شده در این پنج بسته چقدر است؟

۱/۰۳ (۴)

۱/۰۲ (۳)

۱/۰۱ (۲)

۱ (۱)

۲۴۰

نکته

اگر همه داده‌ها را ابتدا در عدد ثابت a ضرب کنیم و سپس با عدد ثابت b جمع کنیم
آنگاه میانگین این داده‌ها نیز ابتدا در a ضرب و سپس با b جمع می‌شود.

$$\bar{x}_{ax+b} = a\bar{x} + b \text{ به عبارت دیگر:}$$

در یک نمونه‌گیری میانگین داده‌های آماری x_1, x_2, x_3, x_4 و x_5 برابر با $3/7$ است. میانگین داده‌های $1, 4x_1 - 1, 4x_2 - 1, 4x_3 - 1, 4x_4 - 1$ و $4x_5 - 1$ چقدر است؟

۱۲/۸ (۴)

۱۱/۸ (۳)

۱۳/۸ (۲)

۱۴/۸ (۱)

۲ ۴ ۱

داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب با فراوانی نسبی $0/15, 0/2, 0/25, 0/3$ و $0/1$ گردآوری شده‌اند. میانگین این داده‌ها چقدر است؟

۲/۹ (۴)

۳ (۳)

۳/۲ (۲)

۳/۱ (۱)

۲ ۴ ۲

نتیجه

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ به ترتیب با فراوانی های نسبی $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ داشته باشیم آنگاه میانگین این داده ها صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{x} = \sum F_i x_i$$

میانگین داده های جدول زیر کدام است؟

داده	۲	۶	۱۰	۱۴	۱۸	۲۲
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳	۰/۱۵	۰/۰۵

۱۰/۸ (۲)

۱۰/۵ (۱)

۱۱/۶ (۴)

۱۱/۲ (۳)

قلمچی ۱۱ مهر ۱۴۰۴

۲ ۴ ۳

یک تاس را چندین بار پرتاب کرده ایم و اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب با درصد فراوانی نسبی ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۱۳، ۳۰ و a ظاهر شده اند. میانگین اعداد ظاهر شده را حساب کنید.

۳/۷ (۴)

۳/۶۴ (۳)

۳/۶ (۲)

۳/۷۲ (۱)

۲ ۴ ۴

نتیجه

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ به ترتیب با درصد فراوانی های نسبی $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ داشته باشیم آنگاه میانگین این داده ها صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{x} = \frac{\sum P_i x_i}{100}$$

تمرین: میانگین ۱۲ داده آماری برابر با ۳۴ و میانگین ۸ داده آماری دیگر برابر ۳۱ است. میانگین تمام این داده ها چقدر است؟

نتیجه

اگر n داده آماری با میانگین $\bar{x}$ و m داده آماری با میانگین $\bar{y}$ داشته باشیم آنگاه میانگین کل این داده ها برابر است با:

$$\frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m + n}$$

میانگین ۱۵ داده آماری برابر ۶ است. اگر داده های ۲ و ۱۰ را به این داده ها اضافه کنیم میانگین کل این داده ها چقدر است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۲۴۵

میانگین ۱۲ داده آماری برابر با $7/5$ است. اگر داده‌های ۸، ۱۱ و ۵ را از این داده‌ها حذف کنیم میانگین داده‌های جدید چقدر خواهد شد؟

۵/۳ (۴)

۵/۱ (۳)

۶/۳ (۲)

۶/۱ (۱)

۲۴۶

تعریف انحراف از میانگین

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ داشته باشیم آن‌گاه برای هر داده x_i عدد $x_i - \bar{x}$ را **انحراف از میانگین** داده x_i می‌گوییم.

انحراف از میانگین یک داده می‌تواند عددی مثبت یا منفی یا صفر باشد. بدیهی است که اگر انحراف از میانگین داده‌ای برابر صفر باشد آن داده با میانگین برابر است.

نکته

مجموع انحراف از میانگین تمام داده‌ها همواره برابر با صفر است.

اگر میانگین داده‌های ۱۲، ۲۰، ۱۸، a ، ۱۲، ۲۰، ۱۸ و ۱۵ برابر با $16/5$ باشد آن‌گاه a کدام است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

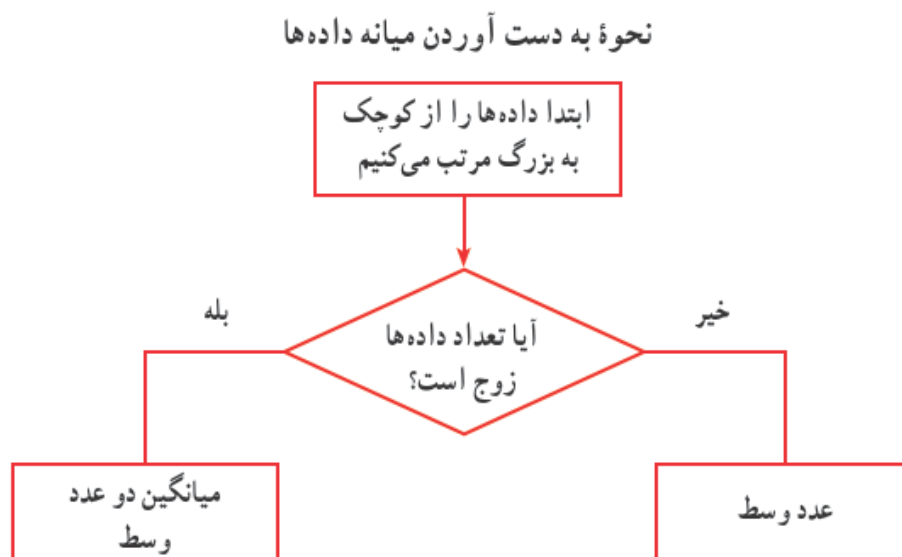
۲۴۷

تعریف میانه

اگر n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ را از کوچک به بزرگ یا برعکس مرتب کنیم آن گاه عددی که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر باشد را **میانه** می‌گوییم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

اگر n (تعداد داده‌ها) عددی فرد باشد داده وسط، میانه است.

اگر n عددی زوج باشد آن گاه میانگین دو داده وسط، میانه است.



تمرین: میانه داده‌های ۱۲، ۷، ۷، ۲۳، ۱۳، ۱۹، ۱۸، ۶، ۱۷، ۲۳ و ۱۳ را به دست آورید.

تمرین: میانه داده‌های ۱۲، ۱۹، ۲۹، ۱۹، ۲۸، ۳۴، ۱۲، ۸، ۴۴، ۹۷ را بیابید.

نکته

اگر همه داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در عددی ثابت ضرب و سپس با عدد ثابت دیگری جمع کنیم آنگاه میانه این داده‌ها هم در همان عدد ثابت ضرب و با همان عدد ثابت دیگر جمع می‌شود.

به عبارت دیگر اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با Q_2 باشد و همه این داده‌ها را ابتدا در a ضرب و سپس با b جمع کنیم آنگاه میانه داده‌های جدید برابر است با: $aQ_2 + b$

اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ برابر با $13/2$ باشد میانه داده‌های $5 - 3x_1, 5 - 3x_2, \dots, 5 - 3x_8$ کدام است؟

۳۶/۶ (۴)

۳۶/۲ (۳)

۳۴/۶ (۲)

۳۴/۲ (۱)

۲۴۸

اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25}$ برابر با ۲۳ باشد و داده‌های ۳۹، ۸۲، ۱۵ و ۴ را به این داده‌ها اضافه کنیم آنگاه میانه این ۲۹ داده کدام است؟

۲۲/۵ (۴)

۲۳/۵ (۳)

۲۲ (۲)

۲۳ (۱)

۲۴۹

تعریف چارک اول و چارک سوم

اگر میانه n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر Q_2 باشد
 آن گاه میانه داده های کوچک تر از Q_2 را **چارک اول** می گوئیم
 و آن را با Q_1 نمایش می دهیم.
 به همین ترتیب میانه داده های بزرگ تر از Q_2 را **چارک سوم** می نامیم
 و آن را با Q_3 نمایش می دهیم.
 حاصل $Q_3 - Q_1$ را **دامنه میان چارکی** می گویند.
 دقت کنید که دامنه میان چارکی همواره عددی مثبت است.

برای داده های ۱۳، ۶، ۱۸، ۴، ۴، ۵، ۱۲ و ۱۴ حاصل $Q_1 + Q_2 + Q_3$ کدام است؟

۳۱/۵ (۱)	۳۴/۵ (۲)	۳۳/۵ (۳)	۳۲/۵ (۴)
----------	----------	----------	----------

۲۵۰

تعریف مُد (نما)

اگر در میان n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ یک داده بیشترین فراوانی را داشته باشد
 به آن داده **مُد** می گوئیم و آن را با M نمایش می دهیم.
 اگر دو داده دارای بیشترین فراوانی باشند آن گاه آن دو داده، مُد محسوب می شوند.
 به چنین جامعه آماری **جامعه دو مدی** می گویند.
 اگر فراوانی همه داده ها یکسان باشد در این جامعه مُد وجود ندارد.
 در این حالت می گوئیم این جامعه **فاقد مُد** است.

تمرین: در یک مسابقه پرتاب دارت سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند امتیازهای زیر به دست آمده است:

نفر اول	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۹	۵	۴

الف) مد نفر اول چه عددی است؟

ب) مد نفر دوم چه عددی است؟

پ) مد نفر سوم چه عددی است؟

اگر جدول درصد فراوانی نسبی یک جامعه آماری مطابق شکل زیر باشد آنگاه در این جامعه مد کدام است؟

داده	a	b	c	d	e
درصد فراوانی نسبی	۱۵	x	۲۲	۲۸	۶

d (۴)

c (۳)

b (۲)

a (۱)

۲۵۱

نکته

اگر همه داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در عددی ثابت ضرب و سپس با عدد ثابت دیگری جمع کنیم آنگاه مد این داده‌ها هم در همان عدد ثابت ضرب و با همان عدد ثابت دیگر جمع می‌شود.

به عبارت دیگر اگر مد داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با M باشد و همه این داده‌ها را ابتدا در a ضرب و سپس با b جمع کنیم آنگاه مد داده‌های جدید برابر است با: $aM + b$

در داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، داده ۱۲ مُد است. اگر ابتدا همه داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب و سپس با ۹ جمع کنیم مُد داده‌های جدید برابر با ۵۷ است. حالا اگر همه داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را در $2a$ ضرب کنیم مُد این داده‌ها چقدر خواهد بود؟

۱۲ (۴)

۱۲۰ (۳)

۹۶ (۲)

۲۴ (۱)

۲۵۲

تعریف داده دور افتاده

اگر در میان n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داده ای باشد که مقدارش تفاوت بسیار زیادی با بقیه داده‌ها داشته باشد به آن، **داده دور افتاده** می‌گوییم.

به عنوان تمرین در میان داده‌های ۱۲، ۱۵، ۱۱، ۱۲، ۱۹، ۸۳، ۲۲ داده ۸۳ داده‌ای دور افتاده است.

در داده‌های ۷، ۸، ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۴، ۷۵، ۱۳ و ۱۶ با حذف داده دور افتاده کدام شاخص بیشترین تغییر را خواهد داشت؟

دامنه میان چارکی (۴)

مُد (۳)

میان (۲)

میانگین (۱)

۲۵۳

تمرین های کتاب درسی

۱ تعداد حمله های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفته گذشته چه عددی است؟

۵۵، ۲۷، ۲۹، ۳۲، ۲۸، ۳۱، ۲۹

۳ میانه و مد هریک از داده های زیر را به دست آورید؟

پ) ۱۵، ۸، ۳، ۱۰

ب) ۶۰، ۵۰، ۴۰، ۲۴، ۳۰۰

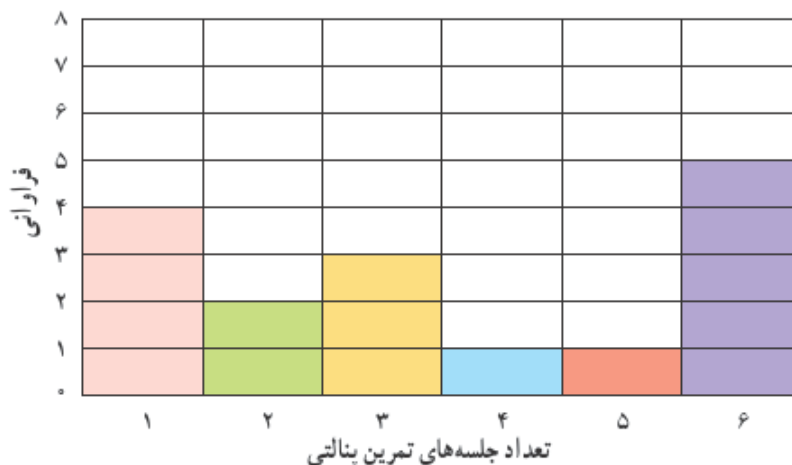
الف) ۸، ۹، ۹، ۹، ۹

ج) ۷، ۴، ۱۳، ۷

ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳

ت) ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی اند؟

۱۷/۵	۱۹	۱۷	۱۶	۲۰	نمرات درس ریاضی
۱۶	۱۵	۱۸	؟	۱۸	
میانگین نمرات = ۱۷/۵					
مد نمرات = ؟					



۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعه یک دانش آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته گذشته مطالعه کرده است؟

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر $42/2$ میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۶۶ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد

شد؟

درس سوم

معیارهای پراکندگی

تعریف واریانس و انحراف معیار

یکی از شاخص های مهم در تشخیص پراکندگی داده ها **واریانس** است. برای n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ واریانس به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

به عبارت دیگر برای یافتن واریانس مجموعه ای از داده ها هر داده را منهای میانگین می کنیم، این عدد را به توان ۲ می رسانیم و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می کنیم. در انتها این عدد را بر تعداد داده ها تقسیم می کنیم. جذر واریانس را **انحراف معیار** می نامند.

هر چقدر واریانس و انحراف معیار کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشند نشانه آن است که پراکندگی داده ها حول میانگین کم و داده ها به هم نزدیکترند. به همین ترتیب اگر این شاخص ها اعدادی بزرگتر باشند نشانه دوری داده ها از میانگین است.

تمرین: واریانس داده‌های ۵، ۶، ۱۲، ۸، ۸، ۷، ۹ و ۹ را حساب کنید.

اگر واریانس و انحراف معیار ۱۲ داده آماری با هم برابر و مخالف صفر باشد آنگاه مجموع مربعات انحراف از میانگین این داده‌ها چقدر است؟

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۳۶ (۲)

۴۸ (۱)

۲۵۴

میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به‌طوری‌که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

۴/۵ (۴)

۳/۷۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ داخل

۲۵۵

نکته

اگر داده‌های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند آن‌گاه انحراف معیار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d$$

واریانس داده‌های ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰ و ۲۳ کدام است؟

۳۶ (۴)

۶ (۳)

۱۶ (۲)

۴ (۱)

۲۵۶

انحراف معیار داده‌های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۳ کدام است؟

۸ (۴)

 $2\sqrt{2}$ (۳)

۱۰ (۲)

 $\sqrt{10}$ (۱)

۲۵۷

نکته (خارج از کتاب درسی)

اگر مجموع مربعات داده‌های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داده شده باشند
آن گاه برای محاسبه واریانس بهتر است از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

میانگین اندازه اضلاع ۱۰ مربع برابر $1/2$ و مجموع مساحت های آنها برابر $25/4$ است. واریانس اضلاع این مربع ها کدام است؟

۰/۷ (۴)

۰/۹ (۳)

۱/۱ (۲)

۱/۳ (۱)

۲۵۸

یک تاس را ۲۰ بار پرتاب کرده‌ایم و نتایج حاصل را در جدول زیر نوشته‌ایم. واریانس اعداد رو شده چقدر است؟

عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۴	۲	۶	۳	۲	۲

۲/۵ (۴)

۲/۷ (۳)

۳/۲ (۲)

۳ (۱)

۲۵۹

نتیجه

اگر داده‌های $x_n, \dots, x_3, x_2, x_1$ به ترتیب دارای فراوانی $f_n, \dots, f_3, f_2, f_1$ باشند آن‌گاه واریانس این داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

اگر داده‌های $x_n, \dots, x_3, x_2, x_1$ به ترتیب دارای فراوانی نسبی $F_n, \dots, F_3, F_2, F_1$ باشند آن‌گاه واریانس این داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \sum F_i (x_i - \bar{x})^2$$

اگر داده‌های $x_n, \dots, x_3, x_2, x_1$ به ترتیب دارای درصد فراوانی $P_n, \dots, P_3, P_2, P_1$ باشند آن‌گاه واریانس این داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\sum P_i (x_i - \bar{x})^2}{100}$$

تمرین: در یک نمونه‌گیری از میزان حقوق کارمندان یک اداره نتایج زیر بر حسب میلیون تومان به دست آمده است. انحراف معیار حقوق این افراد چقدر است؟

حقوق	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۳	۰/۳	۰/۱	۰/۲

تمرین: در یک نمونه گیری از تعداد فرزندان خانواده های ساکن در یک شهرک نتایج زیر به دست آمده است. واریانس تعداد فرزندان این خانواده ها چقدر است؟

تعداد فرزندان	۰	۱	۲	۳	۴
درصد فراوانی نسبی	۵	۶۰	۲۰	۱۰	۵

اگر میانگین داده های دسته بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته چهارم، مقدار واریانس آن ها کدام است؟

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	A	۳

$$۴/۹۲(۲)$$

$$۴/۸۵(۱)$$

$$۵/۷۴(۴)$$

$$۵/۵۵(۳)$$

خیلی سبز ۹ آذر ۱۴۰۳

۲۶۰

اگر واریانس داده‌های $1, 5, a+1, 3a+1$ برابر ۵ باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟ ($a > 0$)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

قلمچی اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۶۱

اختلاف داده‌ها از میانگین در ۵ داده آماری به صورت a^2 و $a+3$ و $-2a+2$ و $-2a+1$ و -2 است. واریانس این داده‌ها کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۳/۸ (۳)

۱۵/۲ (۲)

۱۴/۸ (۱)

قلمچی ۶ تیر ۱۴۰۴

۲۶۲

اگر انحراف ۵ داده آماری از 3 به ترتیب برابر $-1, -5, -6, -7$ و 4 باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

۲۵,۴ (۴)

۲۴,۶ (۳)

۱۶,۴ (۲)

۱۵,۶ (۱)

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۶۳

به ۱۶ داده آماری با واریانس ۰.۴۵ دو داده جدید اضافه می کنیم. اگر میانگین داده های جدید تغییر نکند ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش یابد، اختلاف دو داده جدید کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ داخل

۲۶۴

واریانس پنج داده آماری برابر $\frac{۱۶}{۳}$ است. با اضافه کردن سه داده a ، a و b به داده های اولیه، میانگین داده ها تغییر

نکرده ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش پیدا می کند. اختلاف a و b کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ خارج

۲۶۵

نکته

اگر عددی به همه داده‌ها اضافه یا کم شود
واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

اگر عددی ثابت مانند a در همه داده‌ها ضرب شود آن‌گاه
عدد a^2 در واریانس و قدر مطلق a در انحراف معیار ضرب می‌شود.
به عبارت دیگر:

$$\sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \quad \sigma^2_{ax+b} = a^2(\sigma_x^2)$$

واریانس تعدادی داده برابر با $1/44$ است. اگر تمام داده‌ها را ابتدا در $\frac{-3}{4}$ ضرب و سپس با 4 جمع کنیم آن‌گاه انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

$$1/8 \quad (4)$$

$$5/8 \quad (3)$$

$$2/16 \quad (2)$$

$$6/16 \quad (1)$$

۲۶۶

انحراف معیار 22 داده آماری برابر با 2 و میانگین آن‌ها برابر با 15 است. اگر داده‌های 11 و 19 را از این داده‌ها حذف کنیم واریانس داده‌های جدید کدام است؟

$$2/8 \quad (4)$$

$$3/8 \quad (3)$$

$$2/6 \quad (2)$$

$$3/6 \quad (1)$$

۲۶۷

انحراف معیار ۷ داده آماری برابر با $\sqrt{5}$ و میانگین آن‌ها برابر با ۶ است. اگر داده‌های ۶، ۶ و ۶ را به این داده‌ها اضافه کنیم واریانس داده‌های جدید کدام است؟

۳/۳ (۴)

۳/۴ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۶ (۱)

۲۶۸

واریانس ۶ داده آماری برابر با $\frac{10}{3}$ و میانگین آن‌ها ۵ است. اگر داده ۶ را از میان داده‌ها حذف کنیم واریانس بقیه داده‌ها چقدر است؟ **سنجش ۳۱ فروردین ۱۴۰۳**

۴/۷۶ (۴)

۳/۶۷ (۳)

۳/۷۶ (۲)

۴/۶۷ (۱)

۲۶۹

واریانس ۶ داده آماری برابر با $\frac{7}{5}$ و واریانس ۴ داده دیگر برابر با $\frac{6}{25}$ است. اگر میانگین هر دو گروه از داده ها یکسان باشد آنگاه واریانس این ۱۰ داده با هم چقدر است؟

$$\frac{6}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{25} \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$\frac{7}{25} \quad (۱)$$

۲۷۰

نتیجه

اگر میانگین n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ و m داده $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$

با هم برابر باشد و واریانس آنها به ترتیب σ_x^2 و σ_y^2 باشد

آنگاه واریانس این $n + m$ داده برابر است با:

$$\frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n + m}$$

واریانس n داده آماری برابر با ۱۲ و واریانس m داده دیگر برابر با ۱۸ است. اگر میانگین هر دو گروه از داده ها یکسان و واریانس

همه این داده ها برابر با $\frac{102}{7}$ باشد آنگاه تعداد عضوهای دسته اول چند برابر عضوهای دسته دوم است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۱)$$

۲۷۱

تعریف ضریب تغییرات

به میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین، **ضریب تغییرات** می‌گوییم و آن را با CV نمایش می‌دهیم.

بنابراین بر اساس این تعریف، ضریب تغییرات برابر است با
نسبت انحراف معیار به میانگین یا به عبارت دیگر: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

تمرین: تعداد گل‌های زده یک تیم فوتبال در ۲۰ مسابقه از یک فصل مسابقات لیگ برتر مطابق جدول زیر است. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

تعداد گل‌ها	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد مسابقات	۳	۹	۴	۳	۱

اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با ۱ باشد و همه داده‌ها ۳ برابر شوند آن‌گاه ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱)

۲۷۲

اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با ۲ باشد و همه داده‌ها در ۵- ضرب شوند آن‌گاه ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

(۴) ۱۰-

(۳) ۱۰

(۲) ۲-

(۱) ۲

۲۷۳

نتیجه

اگر تمام داده‌ها در عددی مثبت ضرب شوند ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.

اگر تمام داده‌ها در عددی منفی ضرب شوند ضریب تغییرات قرینه می‌شود.

ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با $1/2$ است. اگر به سه برابر همه داده‌ها میانگین آن‌ها را اضافه کنیم آن‌گاه ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

 (۴) $0/6$

 (۳) $1/8$

 (۲) $1/2$

 (۱) $0/9$

۲۷۴

نتیجه

اگر تمام داده‌ها ابتدا در عدد ثابت a ضرب شوند و سپس با عدد ثابت b جمع شوند آن‌گاه ضریب تغییرات جدید از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CV_{new} = \frac{|a|\sigma}{a\bar{x} + b}$$

میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر با ۵ است. اگر از ۴ برابر همه داده‌ها ۱ واحد کم کنیم آن‌گاه نسبت ضریب تغییرات اولیه به ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

$$\frac{19}{20} \quad (4)$$

$$\frac{21}{20} \quad (3)$$

$$\frac{20}{19} \quad (2)$$

$$\frac{20}{21} \quad (1)$$

۲۷۵

دستگاه A کالایی را با میانگین وزنی ۲۰۰ گرم و انحراف معیار ۲/۴ و دستگاه B همان محصول را با میانگین وزنی ۳۰۰ گرم و انحراف معیار ۳/۳ بسته بندی می‌کند. کدام دستگاه دقیق تر عمل می‌کند؟

(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد

(۳) B

(۲) A

(۱) یکسان

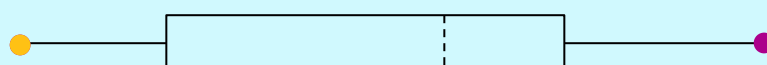
۲۷۶

تعریف نمودار جعبه‌ای

نمودار جعبه‌ای، نموداری است که برای مشخص کردن مدل پراکندگی داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

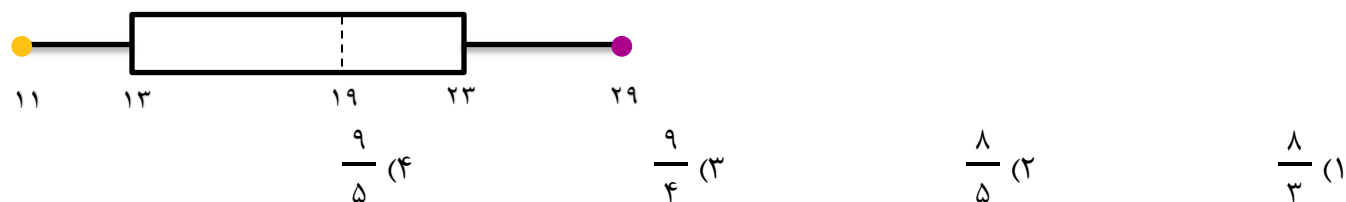
این نمودار بر اساس ۵ شاخص آماری رسم می‌شود:

کوچکترین داده (min)، چارک اول (Q_1)، میانه یا چارک دوم (Q_2)، چارک سوم (Q_3) و بزرگ‌ترین داده (Max)



اختلاف بزرگ‌ترین داده و کوچکترین داده را **دامنه تغییرات** می‌گویند.

در نمودار جعبه‌ای زیر دامنه تغییرات چند برابر دامنه میان چارکی است؟



۲۷۷

در یک نمونه‌گیری داده‌های آماری ۱۲، ۱۹، ۱۳، ۲۳، ۱۱، ۱۱، ۱۴، ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۶، ۱۸ گردآوری شده‌اند و نمودار جعبه‌ای

آن‌ها رسم شده است. واریانس داده‌های داخل جعبه چقدر است؟



۲۷۸

اگر داده‌های آماری ۸، ۱۳، ۱۵، ۱۳/۵، ۹/۵، ۷، ۱۰، ۱۰/۵، ۱۲ را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱/۵ (۲)

۱/۳ (۱)

۱/۹ (۴)

۱/۷ (۳)

قلمچی ۱۱ مهر ۱۴۰۴

۲۷۹

تمرین های کتاب درسی

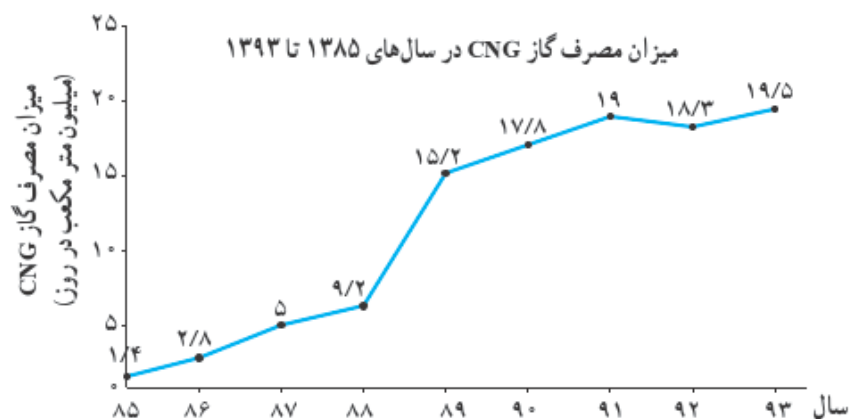
۱ فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده اند، به صورت زیر است :

۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۰،۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سن افراد را به دست آورید.



۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰، ۱۲، ۸، ۱۶، ۱۰، ۴، ۷			
۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱ ۹/۸۸، ۹/۴۲، ۹/۷۶، ۹/۶۲			
۲۰۳۰۰۰، ۲۵۰۰، ۲۰۰۰			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده ها را به دست آورید.

۶ اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده ها چند برابر می شود؟

۷ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل های هر بوته را شمرده ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

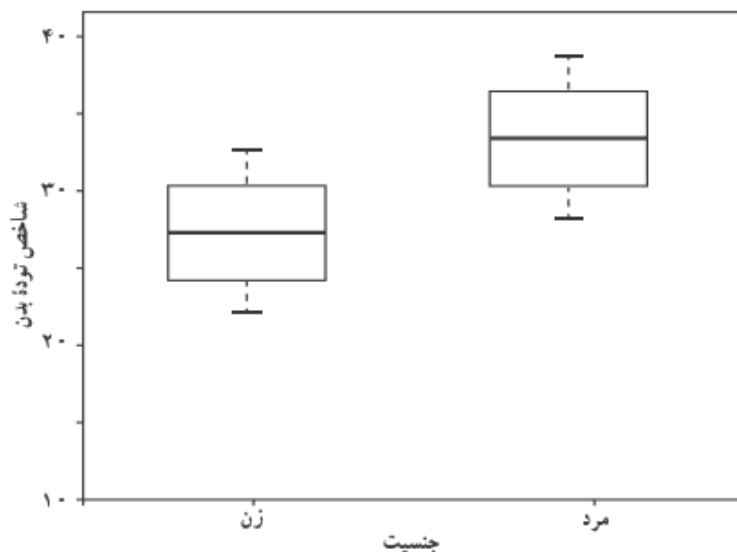
۷، ۴، ۳، ۸، ۶، ۴، ۱، ۷، ۴، ۲، ۱، ۱، ۱، ۳، ۲، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۱، ۲

نمودار جعبه ای را برای این داده ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه ای مربوط به شاخص توده بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانه شاخص توده بدن در خانم ها بیشتر است یا آقایان؟

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم ها بیشتر است یا آقایان؟



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است:

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

تست های کنکور سراسری

اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه اضلاع مربع هایی ۱۵ و $\frac{0}{2}$ باشد میانگین مساحت این مربع ها کدام است؟

کنکور ۱۳۹۱ داخل

۲۳۴ (۴)

۲۳۲ (۳)

۲۲۹ (۲)

۲۲۷ (۱)

۲۸۰

نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است:

A	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹
B	۱۶	۱۴	۱۷	۱۴	۱۷	۱۸

دقت عمل کدام بیشتر است؟ **کنکور ۱۳۹۳ داخل**

(۴) غیر قابل مقایسه

(۳) یکسان

B (۲)

A (۱)

۲۸۱

در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن ها ۴۸۰ است. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟

کنکور ۱۳۹۳ داخل

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

۲۸۲

یک جامعه با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲/۶، با جامعه دیگری به اندازه ۲۴ و واریانس ۷/۲، تشکیل جامعه جدیدی داده اند. اگر

میانگین این دو جامعه یکسان باشد انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۶ داخل**

$$3/2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$3/1 \quad (2)$$

$$2/9 \quad (1)$$

۲۸۳

در جدول فراوانی داده های آماری زیر، انحراف معیار کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۷ داخل**

x	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
f	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹

$$2/7 \quad (2)$$

$$2/9 \quad (1)$$

$$2/6 \quad (4)$$

$$2/8 \quad (3)$$

۲۸۴

۶ داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ داده آماری دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده اند. انحراف معیار گروه جدید، کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۷ خارج**

۳/۲ (۴)

۳ (۳)

۳/۱ (۲)

۲/۹ (۱)

۲۸۵

نمرات ریاضی ۴۰ دانش آموز در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۸ داخل**

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱۴/۲۵ (۲)

۱۴/۲ (۱)

۱۴/۷۵ (۴)

۱۴/۴ (۳)

۲۸۶

میزان بازندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته بر حسب میلی متر اعداد ۳۲، ۵۷، ۴۲، ۳۷، ۵۴، ۵۰، ۴۶، ۵۶، ۳۹ و ۵۹ است. در

نمایش نمودار جعبه ای، ضریب تغییرات داده های داخل جعبه کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۸ خارج**

۰/۱۵ (۴)

۰/۱۲ (۳)

۰/۰۹ (۲)

۰/۰۷ (۱)

۲۸۷

در جدول فراوانی داده های کمی گسسته زیر، تفاضل میانه از میانگین کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۹ خارج**

داده	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

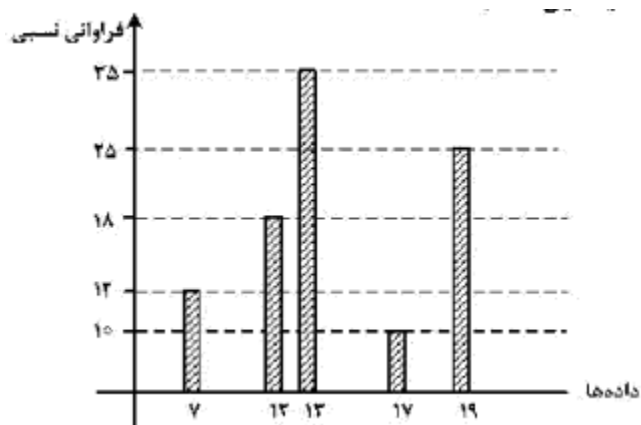
۰/۶ (۴)

۰/۵ (۳)

۲۸۸

با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمی گسسته، میانگین

کدام است؟ **کنکور ۱۳۹۹ داخل**



۱۳ (۱) ۱۳/۸ (۲)

۱۴ (۳) ۱۴/۲ (۴)

۲۸۹

در جدول فراوانی داده‌های آماری زیر، مقدار میانه برابر $۱۳/۵$ و اختلاف چارک اول و سوم ۱۷ است. به هر یک از داده‌های جدول

۴ واحد اضافه می‌کنیم. واریانس جدول جدید کدام است؟ **کنکور ۱۴۰۰ داخل**

x	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۱	a
f	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

۷۱ (۱) ۷۱/۵ (۲)

۷۲ (۳) ۷۲/۵ (۴)

۲۹۰

در یک دسته از اعداد چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دو تای آنها را با کوچک ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می کنیم به طوری که اعداد در دسته دوم، تک رقمی و غیر تکراری باشند.

نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است ؟ **کنکور دی ماه ۱۴۰۱ داخل**

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۲۹۱

در یک مطالعه آماری ۸۳ داده جمع آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند

داده با میانگین این داده ها برابر است ؟ **کنکور تیر ماه ۱۴۰۱ داخل**

۱ (۴)

۳ (۳)

۱۳ (۲)

۱ صفر

۲۹۲

میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است. به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده

a است. اگر واریانس دسته اول $\frac{2}{3}$ بیشتر از واریانس دسته دوم باشد، واریانس دسته اول چقدر است؟ **کنکور تیرماه ۱۴۰۳ داخل**

۶/۲۵ (۴)

۴ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱ (۱)

۲۹۳

اگر انحراف ۵ داده آماری از y ، به ترتیب برابر -۱ ، -۵ ، -۶ ، -۷ و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

۲۵/۴ (۴)

۲۴/۶ (۳)

۱۶/۴ (۲)

۱۵/۶ (۱)

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴ داخل

۲۹۴

به ۱۶ داده آماری با واریانس ۴۰، دو داده جدید اضافه می کنیم. اگر میانگین داده های جدید تغییر نکند ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش یابد، اختلاف دو داده جدید کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ داخل

۲۹۵

واریانس پنج داده آماری برابر $\frac{16}{3}$ است. با اضافه کردن سه داده a ، a و b به داده های اولیه، میانگین داده ها تغییر

نکرده ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش پیدا می کند. اختلاف a و b کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکور تیرماه ۱۴۰۴ خارج

۲۹۶

فصل چهارم

آمار استنباطی

درس اول

گردآوری داده‌ها

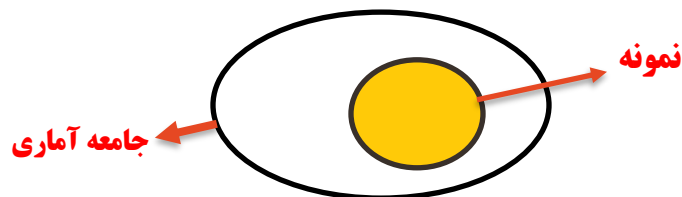
تعاریف اولیه

به واقعیت هایی درباره یک شی یا فرد که در محاسبه، برنامه ریزی و پیش بینی به کار می روند، **داده** می گویند.

به مجموعه تمام افراد یا اشیا می خواهیم درباره آنها، داده ها را گردآوری کنیم **جامعه آماری** و به تعداد اعضای جامعه آماری **اندازه یا حجم جامعه** می گوئیم.

هریک از عضوهای جامعه آماری را، **واحد آماری** می نامیم.

به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روشی مشخص انتخاب شده باشند یک **نمونه** و به تعداد اعضای نمونه **اندازه نمونه** یا **حجم نمونه** می گوئیم.



به عنوان مثال: اگر برای گردآوری اطلاعاتی درباره کارمندان یک اداره، ۱۵ نفر از ۵۰ کارمند را به روش قرعه کشی انتخاب کنیم این ۱۵ نفر یک نمونه و کل کارمندان، جامعه آماری هستند. هر کدام از افراد یک واحد آماری و روش انتخاب افراد، قرعه کشی است.

برای تحقیق و بررسی یک جامعه آماری دو روش اصلی وجود دارد: **سرشماری** و **نمونه گیری**.

اگر اندازه یک جامعه (تعداد عضوهای یک جامعه) بزرگ نباشد می توانیم همه واحدهای آماری (همه اعضای جامعه) را مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. این روش را **سرشماری** می گویند.

اگر اندازه یک جامعه بزرگ باشد یا همه اعضای آن در دسترس نباشند یا دسترسی به آنها وقت گیر و پرهزینه باشد یا ممکن است برخی از نمونه ها در جریان تحقیق آسیب ببینند به جای سرشماری از **نمونه گیری** استفاده می کنیم.

انواع روش های نمونه گیری به دو دسته اصلی **نمونه گیری احتمالی** و **غیر احتمالی** دسته بندی می شوند. نمونه گیری احتمالی روشی است که در آن همه واحدهای آماری شانس معلوم و برابر برای انتخاب شدن در نمونه را دارند و از روشی تصادفی برای انتخاب نمونه استفاده می شود.

انواع نمونه گیری احتمالی عبارتند از: **تصادفی ساده، خوشه ای، طبقه ای و سیستماتیک**

تعریف

نمونه‌گیری تصادفی ساده نوعی روش نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری شانسی برابر برای انتخاب شدن دارند.

اگر تعداد اعضای جامعه آماری برابر با N و تعداد اعضای نمونه برابر با n باشد آن‌گاه احتمال انتخاب هر یک از اعضای جامعه آماری (واحدهای آماری) برای انتخاب شدن در نمونه برابر است با:

$$P = \frac{n}{N}$$

در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده همه واحدهای آماری باید فهرست شوند بنابراین این روش در مواردی که تعداد واحدهای آماری زیاد باشد و دسترسی به فهرست اعضای جامعه کاری دشوار و پرهزینه باشد روش مناسبی نیست.

می‌خواهیم از میان ۴۰۰ فروشنده در یک مرکز فروش ۲۵ نفر را به عنوان نمونه به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب کنیم. شانس انتخاب شدن هر کدام از واحدهای آماری چقدر است؟

$$\frac{1}{400} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{25} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۱)}$$

۲۹۷

برای انتخاب یک نمونه ۱۶ عضوی از یک جامعه آماری، احتمال انتخاب شدن هر واحد آماری برابر $\frac{2}{125}$ است. اندازه این جامعه آماری کدام است؟

$$1200 \text{ (۴)} \quad 1000 \text{ (۳)} \quad 960 \text{ (۲)} \quad 840 \text{ (۱)}$$

۲۹۸

تعریف

اگر جامعه آماری قابل فهرست کردن نباشد جامعه را به دسته‌ها یا زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کنیم و هر زیرمجموعه را یک **خوشه** می‌نامیم. تعداد اعضای خوشه‌ها می‌تواند برابر نباشد.

حالا برای نمونه‌گیری، به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده چند خوشه را انتخاب می‌کنیم و در هر خوشه سرشماری انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر همه اعضای یک خوشه را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم. این روش نمونه‌گیری را **نمونه‌گیری خوشه‌ای** می‌نامند. در این روش فاصله واحدهای آماری در هر خوشه از یکدیگر باید کم باشد.

هر چقدر تنوع و تفاوت متغیر مورد بررسی در خوشه‌ها بیشتر باشد می‌توان انتظار داشت که خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردار باشند و دقت در این نمونه‌گیری افزایش می‌یابد. البته باید بدانیم که دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای از دقت در نمونه‌گیری تصادفی ساده کمتر است.

به عنوان مثال:

برای محاسبه انحراف معیار نمرات درس ریاضیات گسسته دانش‌آموزان شهر تهران می‌توانیم چند مدرسه را به روش تصادفی ساده انتخاب کنیم و سپس نمرات تمام دانش‌آموزان همه این مدارس را بررسی کنیم. در این حالت هر مدرسه یک خوشه است.

اگر تعداد کل خوشه‌ها برابر با N و تعداد خوشه‌های انتخاب شده برابر با n باشد آن‌گاه احتمال انتخاب هر یک از اعضای جامعه آماری (واحدهای آماری) برای انتخاب شدن در نمونه برابر است با:

$$P = \frac{n}{N}$$

کدام گزاره درباره روش نمونه گیری خوشه ای درست نیست؟

- (۱) احتمال انتخاب خوشه ها با هم برابر است.
- (۲) در جامعه های آماری با تعداد اعضای بیشتر، از نمونه گیری تصادفی کم هزینه تر است.
- (۳) خوشه ها از تنوعی شبیه کل جامعه برخوردارند.
- (۴) هنگامی از این روش برای نمونه گیری استفاده می کنیم که فهرست تمام واحدهای آماری معلوم و در دسترس باشد.

۲۹۹

تعریف

در روش **نمونه گیری طبقه ای** ابتدا جامعه آماری را به چند **طبقه** افراز می کنیم.

تفاوت طبقه با خوشه آن است که بین اعضای هر طبقه در موضوع مورد بررسی باید تفاوت زیادی وجود نداشته باشد اما اختلاف و تفاوت بین طبقات باید زیاد باشد.

بعد از آن که جامعه را طبقه بندی کردیم از هر طبقه متناسب با تعداد اعضای آن، واحدهای آماری را انتخاب می کنیم.

در این صورت نمونه ای داریم که مطمئن هستیم طبقات با همان نسبتی که در جامعه وجود دارند به عنوان نماینده جامعه آماری در نمونه حضور دارند.

از این روش هنگامی برای نمونه گیری استفاده می شود که اعضای جامعه در حوزه متغیر مورد بررسی داری ساختار نامتجانس و غیر همگن باشند.

به عنوان مثال:

برای محاسبه میانگین قد یا وزن یا میزان اشتغال افراد یک جامعه با توجه به این که این متغیرها در میان زنان و مردان تفاوت زیادی دارد که باعث نامتجانس شدن ساختار جامعه می شود بهتر آن است که ابتدا جامعه به دو طبقه زنان و مردان افراز شود و سپس از هر طبقه به نسبت تعداد اعضای آن واحدهای آماری را انتخاب کنیم.

با توجه به این که در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه متناسب با تعداد اعضای آن، واحد آماری انتخاب می‌شود احتمال انتخاب همه واحدهای آماری با هم برابر است. بنابراین اگر تعداد اعضای جامعه برابر با N و تعداد اعضای نمونه برابر با n باشد احتمال انتخاب هر واحد آماری برابر است با:

$$P = \frac{n}{N}$$

در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای اگر بخواهیم یک نمونه n تایی از یک جامعه N تایی انتخاب کنیم و تعداد طبقات k تا و تعداد عضوهای طبقات $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ و تعداد واحدهای آماری انتخاب شده از طبقات $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \dots = \frac{n_k}{f_k} = \frac{n}{N}$$

بنابراین سهم عضوهایی که باید از طبقه i ام انتخاب شود برابر است با:

$$n_i = \frac{f_i}{N} \times n$$

در یک اردوی دانش آموزی از استان‌های تهران، گیلان، خوزستان، کرمان و لرستان به ترتیب ۲۰۰، ۱۲۰، ۱۲۰، ۱۰۰ و ۶۰ نفر حضور دارند. می‌خواهیم برای محاسبه میانگین شاخص توده بدنی (نسبت وزن به مجذور قد) این افراد به روش نمونه‌گیری طبقه‌ای ۳۰ را انتخاب کنیم. تعداد دانش آموزان انتخاب شده از استان خوزستان چند نفر است؟ **سنجش ۳۱ فروردین ۱۴۰۳**

(۴) ۵

(۳) ۱۰

(۲) ۶

(۱) ۱۲

۳۰

تعریف

اگر در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، تعداد عضوهای طبقات با هم برابر باشد به این روش نمونه‌گیری روش **نمونه‌گیری سیستماتیک** (سامان‌مند) می‌گوییم.

در این روش از طبقه اول فقط یک نمونه انتخاب می‌کنیم و سپس به همین ترتیب از هر طبقه دیگر نیز یک واحد آماری انتخاب می‌شود. از این روش هنگامی استفاده می‌کنیم که تمام اعضای جامعه آماری به طور تصادفی فهرست شده باشند.

برای انجام این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

اگر تعداد کل واحدهای آماری برابر با N و تعداد عضوهای نمونه برابر با n باشد ابتدا فاصله نمونه‌گیری که برابر با تعداد عضوهای هر طبقه است را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$d = \frac{N}{n}$$

سپس عددی طبیعی مانند a_1 از میان اعداد ۱ تا d به تصادف انتخاب می‌کنیم. a_1 اولین عضو انتخاب شده در نمونه‌گیری است.

حالا با در نظر گرفتن الگوی دنباله‌های حسابی می‌توانیم

شماره نفر i ام را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$a_i = a_1 + (n - 1)d$$

در روش نمونه‌گیری سیستماتیک هم مانند نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال انتخاب هر واحد آماری برابر است با:

$$P = \frac{n}{N}$$

در یک مدرسه ۳۰۰ دانش آموز هست که به هر کدام به طور تصادفی یک عدد از ۱ تا ۳۰۰ نسبت می دهیم. برای انتخاب یک نمونه ۱۵ نفری از این دانش آموزان به روش سیستماتیک اگر شماره نفر پنجم برابر با ۸۷ باشد آن گاه شماره نفر دوازدهم کدام است؟

۲۱۷ (۴)

۲۴۷ (۳)

۲۳۷ (۲)

۲۲۷ (۱)

۳۰۱

در یک جلسه شورای دبیران ریاضی استان تهران ۲۴۰ نفر حضور دارند که روی صندلی هایی به شماره ۱ تا ۲۴۰ به طور تصادفی نشسته اند. اگر بخواهیم یک نمونه n تایی از این افراد به روش سیستماتیک انتخاب کنیم و شماره نفرات هشتم و یازدهم به ترتیب ۸۷ و ۱۳۵ باشد آن گاه n کدام است؟

۱۵ (۴)

۲۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۲ (۱)

۳۰۲

تمرین: جدول زیر را کامل کنید.

روش نمونه گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده		
خوشه ای		
طبقه ای		
سامانمند		

تعریف

اگر یک نمونه شامل همه ویژگی های جامعه باشد آن نمونه گیری را **ایده آل** می گوئیم. اگر یک نمونه گیری از نمونه گیری ایده آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می گویند آن روش نمونه گیری **اُریب** است. بنابراین کارشناسان آمار تلاش می کنند که با شناسایی عوامل تولید اُریبی، نمونه گیری را تا حد امکان نااُریب کنند.

یکی از مهم ترین عوامل اُریبی وجود داده های دورافتاده در نمونه هستند. نمونه گیری های احتمالی مانند تصادفی ساده و طبقه ای معمولاً نااُریب هستند.

روش های آمارگیری

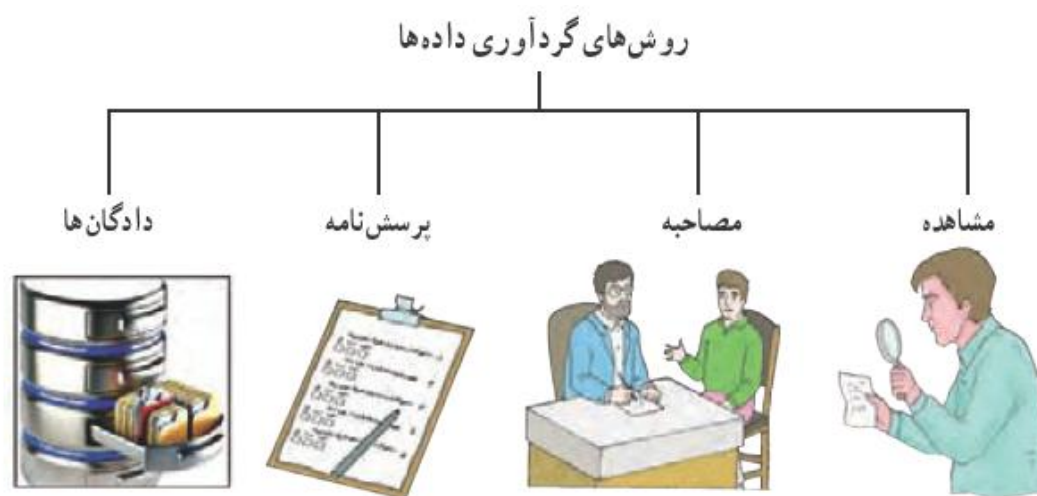
جمع آوری داده ها به یکی از روش های ممکن را **آمارگیری** می گویند و به شخص یا موسسه ای که کار آمارگیری را انجام می دهد **آمارگیر** می گویند. انواع روش های آمارگیری عبارتند از:

مشاهده (Observation): گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخگو مانند شمارش تعداد وسائل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

پرسش نامه (Questionnaire): مجموعه سؤالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می شود. این روش مرسوم ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یک بار با استفاده از پرسش نامه، اطلاعات همه خانوارهای ساکن در ایران را گردآوری می کند. به این فرآیند، سرشماری نفوس و مسکن می گویند.

مصاحبه (Interview): این روش معمولاً بین دو نفر صورت می گیرد، یکی مصاحبه گر (آمارگیر) و دیگری مصاحبه شونده (پاسخگو). مثلاً اگر بخواهیم درباره مسائل مربوط به ترافیک شهری اطلاعاتی گردآوری کنیم مصاحبه با صاحب نظران روشی مناسب برای این کار است. از این روش بیشتر زمانی استفاده می شود که آمارگیر از همه پاسخ های ممکن اطلاعی ندارد.

دادگان (Database): این روش مبتنی بر استفاده از مجموعه ای از اطلاعات ذخیره شده است. به عنوان مثال اگر بخواهیم تحقیقی درباره نمرات درس ریاضی دانش آموزان پایه یازدهم شهرهای یک استان انجام دهیم می توانیم از اطلاعات ثبت شده ادارات کل آموزش و پرورش آن استان استفاده کنیم. با توجه به گسترش شبکه های اطلاعات و ثبت و تولید برخی از داده ها به صورت خودکار در بسیاری از مؤسسات و سامانه ها استفاده از این روش برای گردآوری داده ها در سال های اخیر بسیار رواج پیدا کرده است.



کدام روش برای گردآوری اطلاعات دربارهٔ زمان خواب دانش‌آموزان یک مدرسه مناسب‌تر است؟

(۱) مشاهده (۲) پرسش نامه (۳) مصاحبه (۴) دادگان

۳۰۳

کدام روش برای گردآوری اطلاعات دربارهٔ سن همهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه بر حسب ماه مناسب‌تر است؟

(۱) مشاهده (۲) پرسش نامه (۳) مصاحبه (۴) دادگان

۳۰۴

کدام روش برای گردآوری اطلاعات دربارهٔ تعداد سرنشینان خودروهای سواری در عوارضی قزوین-رشت مناسب‌تر است؟

(۱) مشاهده (۲) پرسش نامه (۳) مصاحبه (۴) دادگان

۳۰۵

تعریف

به مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ ویژگی خاصی از یک جامعه باشد
پارامتر جامعه می‌گویند.

پارامتر جامعه تنها در صورتی قابل محاسبه است که داده‌های کل جامعه را داشته باشیم
 اما معمولاً این امکان وجود ندارد و تمام داده‌های یک جامعه در اختیار و در دسترس
 نیست. بنابراین علیرغم این که پارامتر جامعه مقداری ثابت است اما این مقدار ثابت بر ما
 پوشیده و مجهول است و ما قصد برآورد و تخمین آن را داریم.

به عنوان مثال:

قرار است درباره افرادی که در کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۲ رتبه زیر ۱۰۰ کسب کرده اند پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش تمام افرادی هستند که در این آزمون رتبه زیر ۱۰۰ به دست آورده اند. بسته به نوع و هدف این پژوهش، به اطلاعاتی درباره یک یا چند ویژگی مثلاً نمره دروس حسابان، هندسه و ریاضیات گسسته در امتحان نهایی یا شهر محل سکونت یا جنسیت این افراد مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها **متغیر** می‌گویند. متغیرهای مورد بررسی ممکن است کمی یا کیفی باشند. در این تمرین نمرات دروس ریاضی متغیرهای کمی و شهر محل سکونت و جنسیت متغیرهای کیفی هستند. اگر داده‌های مربوط به تک تک این افراد را داشته باشیم یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. در اینجا به عنوان تمرین نسبت تعداد مردان به کل کسانی که رتبه زیر ۱۰۰ کسب کرده اند یک **پارامتر جامعه** است.

به مشخصه ای عددی که توصیف کننده ویژگی خاصی از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید **آماره یا **آماره نمونه** می‌گویند.**

به عنوان مثال:

در تمرین فوق اگر داده‌های بعضی از افرادی که در کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب کرده اند را داشته باشیم یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت تعداد مردان به تعداد عضوهای این نمونه را **آماره** می‌گویند.

آماره ها از نمونه ای به نمونه ای دیگر تغییر می‌کنند اما پارامترهای جامعه همواره ثابت هستند. در بسیاری از موارد آمارگیری از کل جامعه ممکن نیست بنابراین در این موارد از آماره ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

به عنوان مثال:

اداره کشاورزی استان خوزستان در حال بررسی برخی از ویژگی های هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی هر کدام از هندوانه‌ها **یک واحد آماری** هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند **متغیر** وزن هندوانه‌ها است. وزن یک متغیر کمی است. اگر وزن تک تک هندوانه‌ها محاسبه شود سرشماری انجام داده‌ایم. متوسط وزن تمام این هندوانه‌ها یک **پارامتر** است. اینک فرض کنید که پژوهشگران تصمیم بگیرند بر اساس معیار مزه، هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مثلاً می‌توان مزه هندوانه‌ها را به سه دسته خوب، قابل قبول و بد تقسیم کرد. در این شرایط، مطالعه فقط روی تعدادی از هندوانه‌ها امکان پذیر است زیرا نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه کنیم. پس باید نمونه بگیریم. نسبت تعداد هندوانه‌های دارای مزه خوب به تعداد کل عضوهای نمونه، یک **آماره** است.

فرآیند نتیجه گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه را آمار استنباطی می گویند.

در یک مؤسسه پژوهشی در اداره شیلات شمال می خواهند درباره وزن ماهی های یک استخر پرورش ماهی تحقیقاتی انجام دهند. اگر وزن تک تک ماهی های این استخر اندازه گیری و سپس میانگین وزن همه ماهی ها محاسبه شود به عدد حاصل می گویند. اما از آن جا که امکان صید و اندازه گیری وزن همه ماهی ها وجود ندارد نمونه ای از این جامعه انتخاب می کنیم و میانگین وزن اعضای این نمونه را حساب می کنیم. به این عدد می گویند.

(۱) پارامتر - تخمین (۲) آماره - پارامتر (۳) متغیر - آماره (۴) پارامتر - آماره

۳۰۶

تمرین های کتاب درسی

۱ در نمونه گیری تصادفی ساده، احتمال اینکه فرد به خصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله با جای گذاری باشد، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله بدون جای گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟

۲ آیا در نمونه گیری خوشه ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ چرا؟ احتمال انتخاب خوشه ها چگونه؟ آیا این روش نمونه گیری احتمالی است؟

۳ روش های نمونه گیری احتمالی چه مزیتی بر نمونه گیری های غیر احتمالی دارند؟

۴ برای هریک از روش های نمونه گیری احتمالی دو مثال واقعی بیاورید.

۵ اگر اندازه جامعه بزرگ باشد، نمونه گیری با جای گذاری و بدون جای گذاری تقریباً مثل هم هستند. در این صورت، آیا می توانید راه حل کلی برای انتخاب تصادفی n نمونه از یک فهرست N تایی ارائه کنید؟

۶ آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه گیری طبقه ای برابر است؟ در هر طبقه چگونه؟

۷ فرق بین داده و متغیر چیست؟

۸ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

۹ در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟

۱۰ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده اند؟

- الف) متغیر را مشخص کنید. این متغیر کمی است یا کیفی؟
- ب) کدام روش گردآوری داده ها برای مطالعه مناسب است؟
- پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می توانند باشند؟

۱۱ کدام روش گردآوری داده ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

- میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست های آنها.
- سن همه دانش آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم.
- تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

۱۲ فرض کنید جامعه‌ای از $N = 100$ عضو تشکیل شده و می‌خواهیم نمونه‌ای به اندازه $n = 20$ از آن انتخاب کنیم. در هر یک از حالت‌های زیر احتمال انتخاب هر عضو جامعه به‌عنوان نمونه چقدر است؟ نام هر روش نمونه‌گیری را بگویید.

الف) اگر جامعه به دو قسمت 50 تایی تقسیم شود و بخواهیم از هر قسمت نمونه تصادفی 10 تایی انتخاب کنیم.

ب) اگر جامعه به تصادف به 10 قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت را به‌عنوان نمونه انتخاب کنیم.

پ) اگر جامعه به تصادف به 20 قسمت مساوی تقسیم شود، و از قسمت اول یک عضو به تصادف انتخاب شود. فرض کنید عضو انتخابی دومین عضو باشد و از قسمت‌های بعدی نیز دومین عضو انتخاب شود.

۱۳ دلایل اریبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آنها مناسب‌تر است؟

الف) نمونه‌گیری راحت : افراد در دسترس را به‌عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

ب) نمونه غیر تصادفی : عامل شانس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.

پ) نمونه‌گیری ایمیلی (رایانامه‌ای) : پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می‌شود.

ت) نمونه‌گیری تلفنی : از دفترچه راهنمای تلفن تعدادی شماره به تصادف انتخاب می‌شود.

ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگویی نمی‌باشند.

۱۴ نوع روش نمونه گیری مناسب تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت واردکننده خودروهایی سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آنها می خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می شوند بازرسی کند.

ب) مدیر مدرسه ۶۰۰ نفری می خواهد نظر دانش آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونه ۱۲ تایی بداند.

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه باهم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش آموزان در پایه های مختلف).

۱۵ چگونه از ارقام ۰ تا ۹ عدد تصادفی انتخاب می کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می توان عدد تصادفی بین اعداد ۰ تا ۹۹ انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعه روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی ۱۰۰۰ تایی امکان پذیر است؟

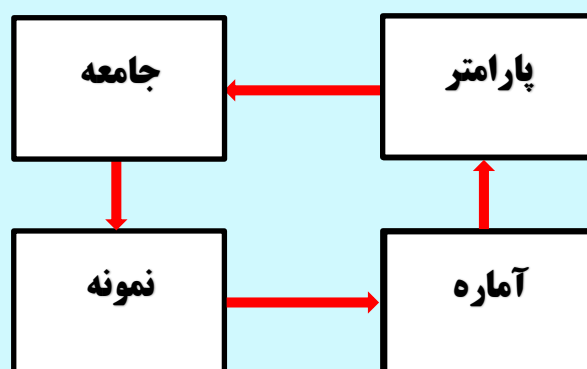
درس دوم

برآورد

تعریف

در یک جامعه آماری، برای محاسبه پارامتر جامعه باید به تمام داده‌های جامعه دسترسی داشته باشیم و از آن جا که به علت محدودیت هایی مانند زمان و هزینه یا در دسترس نبودن همه واحدهای آماری این امکان همیشه فراهم نیست با یکی از روش های نمونه گیری، یک نمونه از جامعه را انتخاب می کنیم و مشخصه مورد نظر را روی اعضای این مجموعه محاسبه می کنیم.

به عدد حاصل آماره می گوییم. سپس از روی مقدار آماره برای مقدار آن پارامتر یک **برآورد** انجام می دهیم و با استنباط آماری، آن را به جامعه تعمیم می دهیم. به این فرآیند **چرخه آمار استنباطی** می گویند.



عددی که با نمونه گیری از یک جامعه آماری به جای پارامتر روی نمونه محاسبه می کنیم را آماره یا مقدار آماره می نامیم. اینک چون با این عدد می توانیم پارامتر جامعه را تخمین بزنیم به آن **برآورد** یا **برآورد نقطه ای** می گوییم.

به عنوان مثال اگر به جای محاسبه میانگین در یک جامعه، میانگین اعضای نمونه را محاسبه کنیم به آن **برآورد نقطه ای میانگین جامعه** می گوییم.

به همین ترتیب برای شاخص های دیگر جامعه مانند میانه، واریانس و انحراف معیار نیز می توانیم برآورد نقطه ای را محاسبه کنیم.

در یک کتاب تعدادی دایره رسم شده است. اگر شعاع یک نمونه ۸ تایی از این دایره‌ها اعداد ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۴ و ۶ باشد آن گاه برآورد نقطه‌ای میانگین مساحت‌های دایره‌های رسم شده در این کتاب چقدر است؟

$$۱۲/۷۵\pi \text{ (۴)}$$

$$۱۲/۵\pi \text{ (۳)}$$

$$۱۲/۲۵\pi \text{ (۲)}$$

$$۱۲\pi \text{ (۱)}$$

۳۰۷

داده‌های یک جامعه به صورت ۱، ۲، ۳ و ۴ است. اگر بخواهیم میانگین این جامعه را با انتخاب نمونه‌های دو عضوی برآورد کنیم آن گاه چند برآورد مختلف برای پارامتر جامعه وجود دارد؟

$$۵ \text{ (۴)}$$

$$۴ \text{ (۳)}$$

$$۳ \text{ (۲)}$$

$$۶ \text{ (۱)}$$

$\{x, y\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$
$x + y$						
میانگین						

۳۰۸

تعداد گل‌های زده یک بازیکن فوتبال در ۸ مسابقه لیگ برتر ۲، ۱، ۰، ۱، ۰، ۳، ۱ و ۲ است. چند نمونه دوتایی از این جامعه میانگین گل‌های زده را ۲ برآورد می‌کند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۳۰۹

تعداد اعضای چند خانواده مطابق جدول زیر است. چند نمونه دوتایی از این جامعه بعد خانوار (میانگین تعداد اعضای خانواده ها) را ۳ برآورد می‌کند؟

خانواده	A	B	C	D	E	F
تعداد اعضا	۳	۲	۴	۳	۴	۱

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۳۱۰

مدیر یک بانک می خواهد میانگین تعداد مراجعه کننده ها به یک باجه در طول یک ساعت را محاسبه کند. اگر تعداد مراجعه کننده ها به این باجه مطابق جدول زیر باشد در چند نمونه دو تایی مقدار عددی آماره با پارامتر جامعه برابر است؟

ساعت	۸-۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴
تعداد مراجعه کننده	۴	۶	۱۰	۸	۸	۶

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

۳۱۱

در یک فروشگاه لوازم خانگی تعداد یخچال های فروخته شده در طول یک هفته مطابق جدول زیر است. احتمال آن که یک نمونه سه تایی، میانگین تعداد یخچال های فروخته شده را ۴ برآورد کند چقدر است؟

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه
تعداد یخچال ها	۱	۳	۴	۳	۵	۶

۰/۳۰ (۴)

۰/۲۵ (۳)

۰/۲۴ (۲)

۰/۲۰ (۱)

۳۱۲

در یک اداره پست وزن ۵ بسته پستی مطابق جدول زیر است. اگر برای محاسبه میانگین این جامعه آماری، نمونه گیری سه تایی از این جامعه انجام دهیم آنگاه کدام نمونه برآورد دقیق تری از پارامتر جامعه ارائه می دهد؟

بسته	A	B	C	D	E
وزن	۱	۲	۱	۳	۴

(۴) ۴، ۲، ۱

(۳) ۳، ۱، ۱

(۲) ۳، ۲، ۱

(۱) ۲، ۱، ۱

۳ ۱ ۳

در فضای نمونه ای شامل اعداد طبیعی یک رقمی، با کدام احتمال برآورد نقطه ای میانگین توسط یک نمونه دو عضوی بزرگ تر از ۶ است؟

 (۲) $\frac{2}{9}$

 (۱) $\frac{1}{4}$

 (۳) $\frac{1}{6}$

 (۴) $\frac{1}{3}$

قلمچی ۱۱ مهر ۱۴۰۴

۳ ۱ ۴

از اعداد ۵ تا N پنج عدد ۹، ۲، ۵، ۸ و ۱۱ به تصادف انتخاب شده اند. برآورد نقطه ای به کمک میانگین کدام است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ خارج

(۴) ۱۶

(۳) ۱۴

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

۳ ۱ ۵

تعریف

اگر انحراف معیار یک جامعه n عضوی برابر با σ باشد آن گاه
انحراف معیار برآورد میانگین جامعه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

با توجه به این رابطه در می یابیم که انحراف معیار برآورد میانگین یک جامعه
 با تعداد عضوهای نمونه، رابطه عکس دارد.

به عبارت دیگر هر چقدر تعداد عضوهای نمونه بیشتر باشد انحراف معیار برآورد کاهش می یابد و
 برآورد دقیق تر با خطای کمتری برای برآورد میانگین جامعه خواهیم داشت.

در یک دانشگاه واریانس قد دانشجویان ۶/۲۵ است. اگر یک نمونه ۴۰۰ نفری از این دانشجویان انتخاب کنیم انحراف معیار
 برآورد میانگین پارامتر جامعه چقدر خواهد بود؟

$$۰/۱۲۵ \quad (۴)$$

$$۰/۱۲۰ \quad (۳)$$

$$۰/۲۵۰ \quad (۲)$$

$$۰/۲۴۰ \quad (۱)$$

۳۱۶

برای محاسبه انحراف معیار برآورد میانگین یک جامعه با انحراف معیار σ ابتدا یک نمونه ۴ عضوی و سپس یک نمونه ۱۶ عضوی
 انتخاب می کنیم. انحراف معیار برآورد میانگین در نمونه گیری دوم چند برابر نمونه گیری اول است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۳۱۷

برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از دو نمونه تصادفی استفاده کرده ایم. اندازه نمونه دوم را طوری انتخاب می کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه دوم، $\frac{2}{3}$ برابر مقدار محاسبه شده با نمونه اول باشد. اندازه نمونه دوم چند برابر نمونه اول است؟

کنکور تیرماه ۱۴۰۱ داخل

۳/۵ (۴)

۲/۷۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱/۵ (۱)

۳۱۸

انحراف معیار برآورد میانگین خسارت ناشی از زلزله براساس نمونه ای از یکی از خیابان های شهر تهران از $\frac{1}{7}$ انحراف معیار

جامعه کمتر است. حداقل تعداد اعضای نمونه کدام است؟

۵۱ (۴)

۵۰ (۳)

۴۹ (۲)

۴۸ (۱)

قلمچی ۱ تیر ۱۴۰۴

۳۱۹

تعریف

برآورد بازه ای یا **بازه اطمینان پارامتر جامعه**، بازه ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان است که به آن ضریب اطمینان می گویند.

اگر تمام داده های یک جامعه آماری در دسترس نباشد می توانیم با نمونه گیری و محاسبه میانگین نمونه انتخاب شده، بازه ای پیدا کنیم که با اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین جامعه در آن بازه باشد.

اگر میانگین یک نمونه n تایی از این جامعه برابر با $\bar{x}$ باشد آن گاه **بازه اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین جامعه** از رابطه زیر به دست می آید:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

در این رابطه σ انحراف معیار جامعه است اما از آن جا که معمولاً انحراف معیار جامعه در اختیار ما نیست σ را همان انحراف معیار نمونه در نظر می گیریم.

در یک جامعه آماری انحراف معیار برابر ۲/۴ است. اگر یک نمونه ۲۵ تایی از این جامعه انتخاب کنیم خطای برآورد میانگین این جامعه با اطمینان بالای ۹۵٪ حداکثر چقدر است؟

۰/۲۴ (۴)

۱/۹۲ (۳)

۰/۴۸ (۲)

۰/۹۶ (۱)

۳۲۰

نمرات درس هندسه ۴ دانش آموز از یک مدرسه اعداد ۲۰، ۱۸، ۱۶ و ۱۴ است. بازه اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین نمرات هندسه همه دانش آموزان این مدرسه کدام است؟ ($\sqrt{5} \approx 2.24$)

- (۱) $[16/76, 17/24]$ (۲) $[16/88, 18/12]$ (۳) $[14/76, 19/24]$ (۴) $[15, 19]$

۳۲۱

اگر واریانس ضریب هوشی افراد یک جامعه ۲۵ باشد با انتخاب یک نمونه ۱۰۰۰۰ نفره از افراد این جامعه طول بازه اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین ضریب هوشی افراد این جامعه کدام است؟

- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

۳۲۲

اگر با یک نمونه گیری ۸۱ تایی از یک جامعه، بازه اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین پارامتر این جامعه به صورت $[24/56, 27/36]$ باشد آن گاه انحراف معیار این نمونه چقدر است؟

- (۱) ۰/۶۳ (۲) ۰/۵۴ (۳) ۰/۷۲ (۴) ۰/۹

۳۲۳

اگر با یک نمونه گیری از یک جامعه، بازه اطمینان بالای ۹۵٪ میانگین پارامتر این جامعه به صورت $[۶۳/۶۹, ۵۸/۳۱]$ باشد آن گاه میانگین این نمونه چقدر است؟

۶۱/۵ (۱) ۶۱ (۲) ۶۲ (۳) ۵۹/۵ (۴)

۳۲۴

جامعه ای از دو بخش ۳۶ و ۶۴ نفری به ترتیب با واریانس ۱۳ و $۶/۷۵$ تشکیل شده و میانگین هر دو بخش یکسان است. اگر یک نمونه ۹ تایی از این جامعه انتخاب کنیم طول بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ برای میانگین این جامعه کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۲۵

تعریف

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه برای هر نفر مورد نیاز است.
خط فقر برابر است با نصف درآمد میانگین جامعه.

از یک جامعه، ۶ نفر با درآمدهای ماهیانه ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ میلیون تومان انتخاب شده اند. اگر انحراف معیار جامعه را همان انحراف معیار نمونه فرض کنیم بازه اطمینان بالای ۹۵٪ خط فقر این جامعه کدام است؟ ($\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۵$)

۱) $[۱۴/۷۵, ۲۵/۵]$ ۲) $[۱۹/۵, ۴۰/۵]$ ۳) $[۹/۷۵, ۲۰/۲۵]$ ۴) $[۱۲/۵, ۳۳/۵]$

۳۲۶

تمرین های کتاب درسی

۱ در اولین کار در کلاس، جداول را برای نمونه گیری تصادفی ساده به اندازه ۴ و ۵ تشکیل داده و مقادیر $\bar{x}$ را در مقابل احتمال مشاهده هر مقدار، محاسبه و در جدولی بنویسید.

۲ از اعداد ۰ تا N ، ۱۰ عدد به تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۵	۸	۹	۱۱	۱۲	۳	۷	۵	۲	۹
---	---	---	----	----	---	---	---	---	---

۳ رئیس یک دانشگاه علاقه مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت نام کرده اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونه تصادفی از سن ۲۵ دانشجو را انتخاب می کند. میانگین سن آنها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی های گذشته انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر $1/9$ سال باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه را محاسبه کنید.

- ۴ طول فاصله اطمینان، برابر تفاضل حد بالا و پایین بازه اطمینان است.
- الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه نمونه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می یابد. چرا؟
- ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می یابد. چرا؟

۵ داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۱ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵

۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰

۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

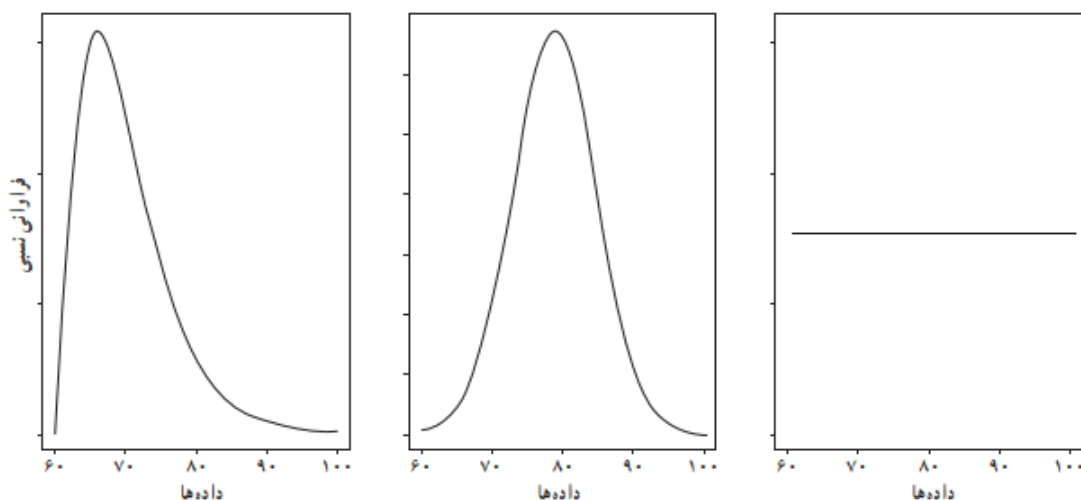
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل $[۶۶/۵, ۷۰/۵]$ و $[۷۰/۵, ۷۴/۵]$ و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام یک از نمودارهای صفحه بعد شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب: یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است.)



۶ اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به اندازه ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل μ نشان دهنده میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همه دانش آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونه ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازه اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان دهنده میانگین نمونه و پاره خط‌های افقی آبی معرف فاصله اطمینان مربوطه اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

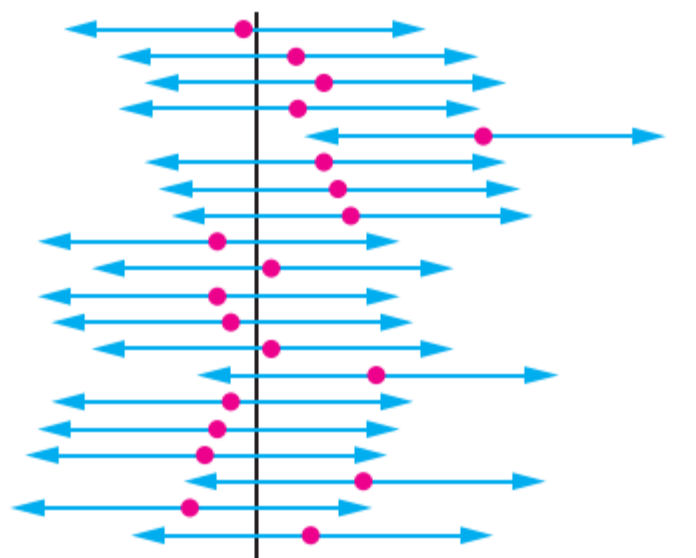
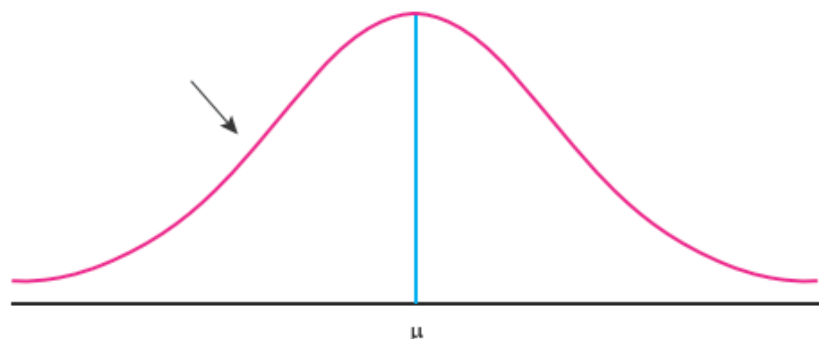
الف) اگر پاره خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

ب) چند درصد از ۲۰ پاره خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

پ) اگر ۱۰۰ پاره خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکنند؟

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازه اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازه اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم از آنها پارامتر میانگین جامعه را در بر گیرند.

چند بر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها



بازدهای اطمینان ۹۵ درصد
برای نمونه‌های مختلف

۷ شاخص پوسیدگی دندان ($DMFT$) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به طور متوسط هر ایرانی دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پر شده است. براساس نمونه‌ای به اندازه ۴۰۰، این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\bar{x} = 2$). اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۱/۶ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده محاسبه کنید.

۸ پارامتر میانگین جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟ (۵ آماره نام ببرید)

۹ پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟

۱۰ در فصل قبل با چه آماره‌هایی آشنا شده‌اید؟ آنها چه پارامترهایی را برآورد می‌کردند؟

۱۱ مثال‌های این درس را با اندازه نمونه‌های مختلف حل کنید. چه نتیجه‌هایی می‌توان گرفت؟ (مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.)