

مبانی ریاضیات

پایه ی کفتم و عشق آغاز شد

پایه یازدهم
آمار و احتمال

گزاره: 😊

$T \rightarrow > \quad F \rightarrow \cup$

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد گزاره می‌گوییم.
 ✓ جملات پرسشی امری عاطفی احساسی تعجبی و جملائی که نتوان ارزش آن‌ها را تعیین کرد گزاره نمی‌باشند.

مثال: 🧐

- الف) حال شما چطور است؟ (پرسشی)
 ب) آن خودکار را روی میز بگذار. (امری)
 ج) نامت سپیده دمی که بر پیشانی آسمان می‌گذرد. (احساسی و عاطفی)
 د) چه هوای دل‌انگیزی (تعجبی)
 هـ) ای کاش تیم ملی ایران برنده می‌شد. (دعایی)

✓ هرگاه بتوانیم از اجزای جمله اطلاعات دقیق و درست داشته باشیم آن جمله گزاره نیست.

مثال: 🧐

- الف) قیمت کفش شما ارزان است. ارزان چقدر است؟
 ب) او فوتبالیست است. او کیست
 ج) x عددی مثبت است. x چه عددی است
 د) سعدی شاعر بزرگ ایرانی است. بزرگ یعنی چقدر

✓ حدس‌های ریاضی که هنوز درستی آن‌ها اثبات یا رد نشده‌اند، گزاره محسوب می‌شوند.

مثال: 🧐

- الف) هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ)
 ب) بی‌نهایت عدد اول مانند P وجود دارد که $P + 2$ هم اول باشد.

تمرین: 😊 از بین جملات زیر گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.
 ۱- ایران کشور آسیایی است. گزاره‌ای درست است.

۲- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر $\frac{1}{3}$ است. گزاره‌ای درست است.

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۳- ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. گزاره نیست (بیان احساسات) - مفهوم درست و نادرست استنباط نمی‌شود.

۴- آیا $2 + 3$ برابر ۵ است؟ گزاره نیست (جمله پرسشی است)

۵- هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. گزاره است (ارزش آن معلوم نیست) اگر درست نباشد قطعاً نادرست است.

۶- هر معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. گزاره ای نادرست است.

۷- مجموع هر دو عدد اول زوج است. گزاره ای نادرست است. $2 + 3 = 5$

۸- آیا درخت بلند است؟ گزاره نیست (جملات پرسشی گزاره نمی باشند).

۹- عدد ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عددی اول است. گزاره ای نادرست است (مجموع ارقام پر ۳ بخش پذیر است).

۱۰- نقره فلزی گران بها است. گزاره نیست (چون معیار گران بها بودن معلوم نشده و معلوم نیست اگر قیمت یک شی از چه عددی بالاتر باشد گران بها محسوب می شود). پس نمی توانیم درستی یا نادرستی جمله را تعیین کنیم.

۱۱- آه، چه هوای سردی بیان احساسات (گزاره نیست)

۱۲- آیا $12 = 7 + 3 + 2$ است؟ جملات پرسشی (گزاره نیست)

۱۳- به امید کامیابی شما گزاره نیست (جملات عاطفی)

۱۴- $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$ گزاره است ارزش آن نادرست است.

۱۵- حافظ پزشک ایرانی است. گزاره است با ارزش نادرست

۱۶- آمار مجموعه ای از اعداد و ارقام و اطلاعات است. گزاره است با ارزش درست

۱۷- $\emptyset \notin \mathbb{R}$ گزاره است با ارزش نادرست

۱۸- کاش می شد مردم دانه های دلشان پیدا بود. گزاره نیست. (جملات عاطفی و بیان احساسات)

۱۹- پرسپولیس یک تیم بزرگ و حرفه ای است. گزاره نیست (تعریف بزرگ و حرفه ای معلوم نیست)

۲۰- امروز هوا ابری است، بهتر است چتر برداری گزاره نیست (جملات امری گزاره نمی باشند).

۲۱- علی دانش آموز بسیار خوبی است. گزاره نیست (تعریف بسیار خوب معلوم نیست)

۲۲- بنشین، مرو، گلو که شب از نیم رفته است. گزاره نیست (جملات امری گزاره نمی باشند)

۲۳- چه باران شدیدی (گزاره نیست) شدید بودن تعریف نشده

۲۴- علی دایی یک پزشک ایرانی است. گزاره ای نادرست.

۲۵- لطفاً از کلاس خارج نشوید. گزاره نیست (جملات امری گزاره نیستند)

۲۶- در هر متوازی الاضلاع زاویه های رو به رو هم اندازه نمی باشند. گزاره ای نادرست است.

۲۷- $2^2 - 1 < 9$ گزاره ای درست

۲۸- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ گزاره ای درست است.

مقدار معادله ۲:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$ $\Delta < 0$ $\Delta = 0$

منفرد

فاصله

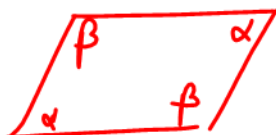
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$1 \in A$$

$$2 \in A$$

$$3 \in A$$

$$\{1\} \subseteq A$$



مثال: در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید. به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

(الف) $-7 \times \boxed{1} = -7$

(ب) $5 + \boxed{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Z}$

(پ) $\frac{8 \times \boxed{1}}{4} \in \left\{ \frac{1}{3}, 2 \right\}$

(ت) $\frac{10 \times 9}{3} \boxed{>} \frac{5 \times 3}{15}$

(ث) $\boxed{0} \times \sqrt{2} = 0$

(ج) $\boxed{1} \in \{ \}$

(چ) $5(\boxed{7} - 3) = 20$

(ح) $7(\boxed{8} - 3) = 35$

مثال: در جاهای خالی، علامت و یا عبارت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند. (کتاب درسی)

H.O.W

(الف) $(0/1)^3 \boxed{>} (0/1)^{5/5}$

(ب) اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، $\sin \alpha \boxed{<} \cos \alpha$

(پ) نمودار تابع $y = x^2$ از نقطه $\boxed{0}$ می‌گذرد.

(ت) $-(x-4)^2 \boxed{>} 0$

(ث) $y = x^2$ تابع $\boxed{}$

(ج) اگر $x^2 = a$ آن گاه $x = \boxed{}$

$(5^3)^3 + (2^3)^3 = (5^3 + 2^3)(\dots)$

تست: ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟
 (۱) $5^9 + 8$ عددی اول است.
 (۲) 1971 عددی اول است.
 (۳) 13 عددی (نخس) است.
 (۴) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

مستطری اتحاد:
 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

ارزش گزاره و جدول ارزش گزاره‌ها: 😊

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.
 ✓ اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را **T** و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد **F** نشان می‌دهند (این دو حرف اول کلمات True و False هستند)

ارزش هر گزاره مانند P می‌تواند درست یا نادرست باشد این مطلب را می‌توان در جدولی به شکل مقابل نشان داد. که به آن جدول ارزش گزاره‌ها گویند.

P
د
ن

۲ حالت

جدول ارزش گزاره‌ها برای دو گزاره p و q به این شکل است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

۲ حالت
 ۲ حالت
 $2 \times 2 = 4$

کمی شمارش
 ۲ حالت
 ۲ حالت
 $2 \times 2 = 4$

جدول ارزش گزاره‌ها برای سه گزاره p و q و r به این شکل است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۲ حالت
 ۲ حالت
 ۲ حالت

۲ حالت
 ۲ حالت
 ۲ حالت
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

۲ حالت
 ۲ حالت
 ۲ حالت
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

۲ حالت
 ۲ حالت
 ۲ حالت
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

سؤال: جدول ارزش گزاره ها برای ۴ گزاره چند حالت دارد؟

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

جدول ارزش گزاره ها برای ۴ گزاره 2^4 حالت دارد.

تست: برای ۴ گزاره s, r, q, p اگر بدانیم ارزش گزاره r درست و ارزش گزاره s نادرست است از نظر ارزش

برای این ۴ گزاره چند حالت مختلف وجود دارد؟

۱۶ (۱)
۱۴ (۲)
۲ (۳)
۴ (۴) ✓

گزاره نما:

خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود گزاره نما نامیده می شود که می توانند یک متغیره، دو متغیره یا ... باشند. مثلاً:

فرد است $9 + 5$

معادله $x^2 + 3x - 4 = 0$ یک گزاره نمای یک متغیره است.

معادله $x^2 + y^2 = 6$ یک گزاره نمای دو متغیره است.

مثال: $n^2 + 4$ عددی مربع کامل است.

a عددی فرد است.

$$S \subseteq D$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$S = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

تست: کدام یک از گزینه‌های زیر نشان‌دهنده یک گزاره‌نما نیست؟

(الف) عددی زوج است.

(ب) در پرتاب یک تاس احتمال رخداد پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است.

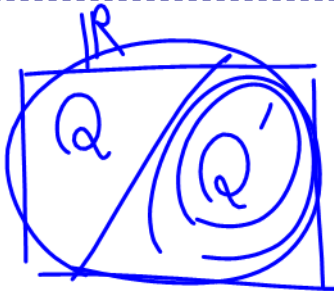
(ج) همه اعداد اول فرد هستند. **گزاره است**

(د) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۶ است.

$$3x + 2y = 6 \quad \text{گزاره‌نمای متغیر است}$$

دامنه متغیر گزاره‌نما:

در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرها قرار داد تا این گزاره‌نما را به گزاره تبدیل کند دامنه متغیر گزاره‌نما می‌نامند و با حرف D نشان می‌دهند.



مثال: در گزاره‌نماهای زیر دامنه متغیر گزاره‌نما را بنویسید.

(الف) p عددی اول است $\leftarrow D = \mathbb{N}$

(ب) a عددی فرد است $\leftarrow D = \mathbb{Z}$

(ج) x عددی گنگ است $\leftarrow D = \mathbb{R}$

$$S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{7}, \dots\}$$

xx تا اینجا xx

مجموعه جواب گزاره:

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند.

✓ اگر D دامنه متغیر گزاره‌نما و S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد. همواره $S \subseteq D$

مثال: دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

(الف) x مضرب ۷ است ($D = \mathbb{Z}$)

$$(b) \quad 15x^2 - 7x - 8 = 0 \quad (D = \mathbb{R})$$

(پ) تاس را پرتاب می‌کنیم $\frac{1}{6}$ و $D(\{x\}) = \{1, 2, \dots, 6\}$

مثال: دامنۀ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

(الف) x مربع کامل است.

(ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

(پ) $\frac{2x+1}{3} \leq -1$

(ت) $\{n(n+1)=0 \mid n \in W\}$

ترکیب گزاره‌ها

✓ عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.

✓ عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است.

✓ اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.

✓ چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.

✓ اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

نقیض یک گزاره:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نقیض گزاره‌ی p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

ارزش $\sim p$ همواره عکس ارزش p است. با توجه به جدول مقابل داریم:

نکته: نقیض اعمال ریاضی به صورت جدول زیر می‌باشند:

P	$=$	$\neq$	$<$	$>$	$\geq$	$\leq$
$\sim p$	$\neq$	$=$	$\geq$	$\leq$	$<$	$>$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) $4 \leq 3$

(ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

(پ) $a \in \{b, c, d\}$

(ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

(ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

(ج) اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a+1$ فرد است.

(د) اگر $0 < x < 1$ ، آن‌گاه $x^2 < x$

دو گزاره‌ی هم‌ارز: 😊

اگر دو گزاره‌ی p و q هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم: p هم‌ارز است با q .

توجه: 😊 دو گزاره‌ی p و $(\sim p)$ هم‌ارز می‌باشند. به جدول مقابل دقت کنید:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب فصلی دو گزاره: 😊

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود. گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید:

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید، **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید».

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت گزاره مرکب بالا درست است. اگر مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین، ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب عطفی دو گزاره: 😊

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب (p, q) را که به صورت $(p \wedge q)$ نوشته می‌شود را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابطه منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$ فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

🧐 **مثال:** گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید. (کتاب درسی)

«سوگند فارغ التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است»

آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟

🧐 فرض کنید:

P : سوگند فارغ التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

✅ اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟

✅ اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟

✅ هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟

✅ هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

🧐 **مثال:** مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم: (کتاب درسی)

$$(2x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

ترکیب شرطی دو گزاره: 🤩

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

با توجه به جدول صفحه قبل ملاحظه می‌کنید که: 🤩

(۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند: ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

(۲) ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

🧐 **مثال:** ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است، آن‌گاه $۲ < ۵$ » به انتفای مقدم نادرست است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره: 😊

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:
 «اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »

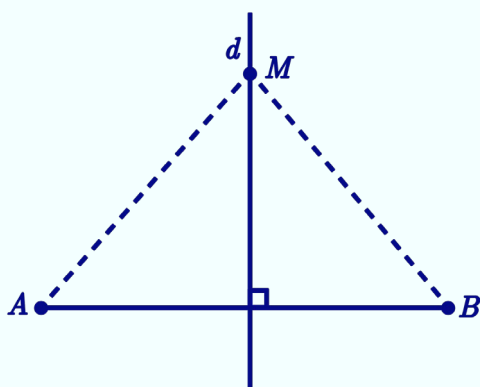
مثال: 😎 گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌هاست.

الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow 2 > 5$

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow \sqrt{2}$ عددی گویاست.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



$$[M \in d(AB \text{ عمود منصف پاره خط})] \Leftrightarrow MA = MB$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

موسی و شبان

گوهری گفت این خدا و این اله	دید موسی یک شبانی را به راه
چارفت روزم کنم شانه سرت	تو کجایی تا شوم من چاکرت
این بیارت هستی و هیها من	این فدای تو هم بزها من
گفت موسی باکی است این فلان	زین نعط بیهوده می گفت آن شبان
این زمین و چرخ از او آفرید	گفت با آن کس که ما را آفرید
خود مسلعان ناشده کافر شدی	گفت موسی هار خیره سر شدی
آتش آید بسوزد خلق را	گر نبندی زین سخن تو خلق را
والد و مولود را او خالق است	لم یلد لم یولد او را لایق است
وز شیعیانی تو جانم سوختی	گفت این موسی دهانم روختی
بنده من مار از ما کردی جدا	وحی آفرسون موسی از خدا
نی برای فصل کردن آفری	تو برای وصل کردن آفری
هر کسی را اصطلاحی داده ایم	هر کسی را سیرتی بنهاده ایم
مادرون را بنگریم و حال را	ما برون را ننگریم و قال را
این خطا از صد صواب اولی تراست	خون شهیدان را از آب اولی تراست
عاشقان را ملت و مذهب خداست	ملت عشق از همه دین ها جداست
در بیابان دریچ چوپان روید	چون که موسی این عتاب از حق شنید
گفت فرزد که دستوری رسید	عاقبت دریافت او را و برید
هر چه می خواهد دل تنگت بلو	هیچ آدابی و ترتیبی معو

ترکیب فصلی دو گزاره 🤪

p	q	$p \vee q$
د	د	☐
د	ن	☐
ن	د	☐
ن	ن	☐

گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره‌ی ساده‌ی p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم و با $p \vee q$ نشان می‌دهیم. به رابط منطقی « $\vee$ » فاصل گفته می‌شود.

✓ موسی ← پیامبر خدا ←

ترکیب عطفی دو گزاره 🤪

p	q	$p \wedge q$
د	د	☐
د	ن	☐
ن	د	☐
ن	ن	☐

گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره‌ی ساده‌ی p و q با رابط منطقی «و» تشکیل شده است را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم و با « $p \wedge q$ » نشان می‌دهیم. به رابط منطقی « $\wedge$ » گفته می‌شود.

✓ فرعون ← انسان بد ←

بدانید که:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	☐
ن	د	☐

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	☐
ن	د	☐

✓ قوانین دمورگان و جذب:

قانون دمورگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
قانون جذب	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$	$p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ترکیب شرطی دو گزاره 🤪

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $p \Rightarrow q$ را که به صورت «اگر p آن گاه q » خوانده می‌شود، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » گزاره‌ی p را مقدم یا فرض و گزاره‌ی q را، تالی یا حکم می‌نامیم.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	☐
د	ن	☐
ن	د	☐
ن	ن	☐

✔️ ثبات $\leftarrow$ دوستش داریم.

✔️ آدم خوب شدن $\leftarrow$ دوستش داریم.

✔️ آدم بد شدن $\leftarrow$ دوستش نداریم.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

ترکیب دو شرطی 🤪

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره‌ی « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	☐
د	ن	☐
ن	د	☐
ن	ن	☐

✔️ ثبات $\leftarrow$ دوستش داریم.

✔️ تخییر $\leftarrow$ دوستش نداریم.

مثال: جدول زیر را کامل کنید. (کتاب درسی)

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$				
.....	$x = 1$ تابع نیست	ن			
$\sqrt[5]{-32} = -2$			ن		
.....		ن	ن		
$\sqrt{x} - 1$ یک عبارت چند جمله‌ای است.				د	

مثال: با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم‌ارز هستند. (کتاب درسی)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

مثال: با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$. (کتاب درسی)

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$

مثال: با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \vee q \sim p$ هم‌ارز منطقی‌اند. (کتاب درسی)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

مثال: گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است. (کتاب درسی)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید: (کتاب درسی)

(ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

(الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

مثال: با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید. (کتاب درسی)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

مثال: با وارد کردن جدول زیر در پاسخبرگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (تجایی خرداد ۱۴۰۳)

p	q			
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

مثال: به کمک جبر گزاره‌ها ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است. (کتاب درسی)

مثال: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید. (کتاب درسی)

(الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$

(ب) $(5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$

(پ) $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$

(ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

(ث) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

(ج) $2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3$

(چ) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

مثال: جدول زیر را کامل کنید. (کتاب درسی)

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.					د
	$1 \nless 2$			ن	
$2 \in \{1, 2\}$					ن
	عدد ۷ اول است.			د	

مثال: جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید. (کتاب درسی)

الف) $p \wedge \sim q$

ب) $\sim p \wedge p$

پ) $\sim p \vee p$

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow q \quad \text{ث)}$$

$$\sim p \Leftrightarrow \sim q \quad \text{ج)}$$

مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که: (کتاب درسی)

$$p \Rightarrow p \equiv T \quad \text{الف)}$$

$$p \vee F \equiv p \quad (\text{ب})$$

$$p \wedge T \equiv p \quad (\text{پ})$$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad (\text{ت})$$

$$p \wedge (q \vee p) \equiv p \quad \text{ث)}$$

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \quad \text{ج)}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{ج)}$$

ح) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (کتاب درسی)

الف) اگر $0 < x < 1$ ، آن‌گاه $x^2 < x$

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

مثال: ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است. (کتاب درسی)

تست: اگر r یک گزاره‌ی درست باشد، تحت چه شرایطی گزاره‌ی $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ نادرست است؟

(۱) p و q دو گزاره‌ی نادرست باشند.

(۲) p درست و q نادرست باشد.

(۳) p نادرست و q درست باشد.

(۴) نشدنی

تست: اگر r گزاره‌ای درست و p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، ارزش گزاره‌ی $(r \wedge p) \vee \sim p \wedge q$ چگونه است؟

(۱) نادرست است.

(۲) درست است.

(۳) با p هم‌ارز است.

(۴) با q هم‌ارز است.

تست: ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) اگر $۶ = ۳^۲$ آن‌گاه ۲ اول است.

(۲) اگر ۶ فرد باشد، آن‌گاه $۵ > ۳$ است.

(۳) اگر ۱۱ اول باشد آن‌گاه ۱۲ اول است.

(۴) اگر $۴^۲ = ۲^۴$ آن‌گاه $۳^۲ > ۳^۳$ است.

تست: نقیض گزاره «اگر مسعود در کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب کند، در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته می‌شود» هم ارز منطقی با کدام گزاره زیر است؟

(۱) اگر مسعود در آزمون کنکور رتبه ۱۰۰ کسب نکند، آن‌گاه در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته می‌شود.

(۲) مسعود در آزمون کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب نمی‌کند و در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته می‌شود.

(۳) مسعود در آزمون کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب می‌کند و در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته نمی‌شود.

(۴) مسعود در آزمون کنکور رتبه زیر ۱۰۰ کسب می‌کند یا در رشته مهندسی برق دانشگاه تهران پذیرفته نمی‌شود.

🧐 **تست:** گزاره‌ی $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ ، با کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارزش است؟ (تک‌گزینه‌ای ۹۸)

(۱) $p \vee (q \wedge r)$

(۲) $p \wedge (q \vee r)$

(۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$

(۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

🧐 **تست:** گزاره‌ی $(\sim p \Rightarrow q)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۱) $p \wedge \sim q$

(۲) $\sim p \wedge \sim q$

(۳) $\sim p \vee \sim q$

(۴) $p \vee \sim q$

🧐 **تست:** گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$ ، با کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارزش است؟ (تک‌گزینه‌ای ۹۸)

(۱) $\sim p \vee q$

(۲) $p \vee \sim q$

(۳) $\sim p \wedge q$

(۴) $p \wedge \sim q$

🧐 **تست:** اگر q نادرست باشد، ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

(الف) $q \Rightarrow \sim p$ (ب) $\sim q \vee q \Rightarrow \sim p$ (ج) $\sim q \wedge q \Rightarrow p$ (د) $\sim q \vee q \Rightarrow p$

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تست: نقیض هر گزاره‌ی شرطی کدام است؟ 🧐

- (۱) ترکیب فصلی نقیض مقدم و تالی آن.
- (۲) ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن.
- (۳) ترکیب فصلی مقدم و نقیض تالی آن.
- (۴) ترکیب عطفی نقیض مقدم و تالی آن.

تست: در گزاره $x \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)]$ به جای x کدام گزاره قرار گیرد تا ارزش نقیض گزاره

نادرست باشد؟

- (۱) p
- (۲) $\sim p$
- (۳) q
- (۴) $\sim q$

تست: اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه نقیض گزاره $p \Leftrightarrow [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow \sim p$ کدام است؟ 🧐

- (۱) p
- (۲) $\sim p$
- (۳) همواره درست
- (۴) همواره نادرست

تست: ارزش نهایی $q \Rightarrow [p \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)]$ کدام است؟ (آزمون سنجش) 🧐

- (۱) $\sim (p \vee q)$
- (۲) $\sim q$
- (۳) $\sim p$
- (۴) T

تست: اگر ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ درست باشد، آنگاه ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ب $\sim (p \wedge q) \wedge r$ پ $p \Rightarrow (q \wedge r)$

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

صفر (۴)

تست: کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟ (تک‌وردی ۱۴۰۱)

q (۱)

r (۲)

$r \vee p$ (۳)

$p \vee q$ (۴)

تست: اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه گزاره مرکب $\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ است.

(۱) هم‌ارز منطقی با p است.

(۲) هم‌ارز منطقی با q است.

(۳) همواره درست است.

(۴) همواره نادرست است.

تست: گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

$p \wedge q$ (۱)

$p \vee q$ (۲)

$p \Rightarrow \sim q$ (۳)

$\sim p \Rightarrow \sim q$ (۴)

تست: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، گزاره $p \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \vee (q \vee \sim p)]$ هم ارز با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱) T

(۲) F

(۳) p

(۴) $\sim p$

تست: گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟ (داخل ۱۴۰۴ - اردیبهشت)

(۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

(۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

(۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

(۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

تست: کدام یک از گزاره‌های زیر هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟ (کنکور داخل ۹۹)

(۱) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

(۲) $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

(۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

(۴) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

تست: گزاره ترکیبی $q \sim \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)]$ ، با کدام مورد هم‌ارزش است؟

(۱) F

(۲) T

(۳) $p \vee q$

(۴) $p \wedge q$

تست: کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟ (لنگور داخل ۱۴۰۱)

- (۱) p
- (۲) $p \vee q$
- (۳) q
- (۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

تست: اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (لنگور داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

- (۱) r
- (۲) T
- (۳) $\sim r$
- (۴) $\sim T$

تست: در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ، کدام مورد صحیح است؟ (لنگور داخل ۱۴۰۳ - تیرماه)

- (۱) همواره درست است.
- (۲) همواره نادرست است.
- (۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد.
- (۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

تست: در جدول ارزش گزاره‌های روبه‌رو، علامت سؤال مربوط به کدام گزاره است؟

p	q	?
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

- (۱) $p \wedge q$
- (۲) $\sim p \wedge q$
- (۳) $p \wedge \sim q$
- (۴) $\sim p \wedge \sim q$

تست: اگر عکس نقیض گزاره «اگر p ، آنگاه q مربع کامل است.» دارای ارزش درست باشد، کدام یک از

گزاره‌های زیر را می‌توان به جای p قرار داد؟

(۱) عددی اول است.

(۲) اگر عددی اول باشد، آنگاه q مربع کامل است.

(۳) مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۴) اگر عددی مرکب باشد، آنگاه q عددی اول است.

تست: گزاره $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)) \wedge (q \wedge p)$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

p (۱)

q (۲)

T (۳)

F (۴)

تست: نقیض گزاره «اگر امروز برف ببارد، آنگاه ترافیک ایجاد می‌شود و مدارس تعطیل می‌شوند» کدام

است؟

(۱) اگر امروز برف نبارد، آنگاه ترافیک ایجاد نمی‌شود و مدارس تعطیل نمی‌شوند.

(۲) امروز برف نمی‌بارد، ترافیک ایجاد می‌شود یا مدارس تعطیل می‌شوند.

(۳) اگر امروز برف نبارد، آنگاه ترافیک ایجاد نمی‌شود یا مدارس تعطیل نمی‌شوند.

(۴) امروز برف می‌بارد و ترافیک ایجاد نمی‌شود یا مدارس تعطیل نمی‌شوند.

تست: کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز منطقی گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ است؟ 🧐

(۱) T

(۲) $\sim p$

(۳) $p \Rightarrow q$

(۴) $q \Rightarrow p$

تست: فرض کنید $p: \sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$ ، $q: \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{2}$ و $r: \sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$ سه گزاره باشند. در

این صورت ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$

(۲) $r \Rightarrow (q \vee p)$

(۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$

(۴) $\sim q \Rightarrow (p \vee r)$

تست: گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (داخل ۱۴۰۴ - تیرماه) 🧐

(۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

(۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

(۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

(۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

سور

سورها عبارت‌هایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند.

سور عمومی:

به عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای جميع مقادير» یا ... سور عمومی می‌گوییم و با علامت $\forall$ نشان می‌دهیم.

 **توجه:** گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد، یعنی هر عضو از دامنه‌ی متغیر در گزاره‌نما صدق کند.

 **مثال:** ارزش گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$ (کتاب درسی)

حل: 

نادرست است؛ زیرا $x = \frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

 **مثال:** کدام یک از عبارت‌های زیر درست‌اند؟ (کتاب درسی)

(الف) $\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

(ب) $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \times \cot x = 1$

حل: 

(الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است. بنابراین، برای هر عضو از دامنه متغیر ($\mathbb{Z}$) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

(ب) نادرست است؛ زیرا $x = \frac{\pi}{2}$ ، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

سور وجودی:

به عبارت‌های «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادير» یا ... سور وجودی می‌گوییم و با علامت $\exists$ نشان می‌دهیم.

 گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی درست است که مجموعه‌ی جواب آن تهی نباشد.

 **مثال:** گزاره $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| - 1 < 0$ (کتاب درسی)

حل: 

درست است؛ زیرا حداقل یک عضو $x = 0$ وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

 **مثال:** کدام یک از عبارتهای زیر درست‌اند: (کتاب درسی)

(الف) $\exists x \in \mathbb{Q}' ; x^2 \in \mathbb{Q}$

(ب) $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 = 0$

 **حل:**

(الف) درست است؛ زیرا $\sqrt{2}$ عددی گنگ و $(\sqrt{2})^2$ عددی گویا است.

(ب) نادرست است؛ زیرا عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که در این تساوی صدق کند.

نقیض سورها:

برای ساختن نقیض یک گزاره‌ی سوری، کافی است سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و گزاره‌نما را نقیض کنیم.

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

 **مثال:** ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید. (کتاب درسی)

(الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$

(ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

 **حل:**

(الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون $x = 0$ ، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

(ب) درست است؛ زیرا $y = -1$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\begin{aligned} \sim (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim (y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \\ &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1 \end{aligned}$$

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید. (تدریس کتاب درسی)

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^{2^n} + 1) \in P$

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$

مثال: جدول زیر را کامل کنید. (کاردکلاس کتاب درسی)

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$	برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$
$\forall a \in E; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$	
$\exists p \in P; p = 2k (k \in \mathbb{Z})$	
	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E ، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

🧐 **مثال:** درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (کاردکلاس کتاب درسی)
(الف) هر عدد اول، فرد است.

(ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

(پ) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

(ت) برای هر عدد طبیعی n ، $n!$ عددی گویاست.

(ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

(ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

(چ) در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$.

(ح) هر معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

مثال: گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید. (تقریب کتاب درسی)

(الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

(ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$.

(پ) همه اعداد اول فرداند.

(ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$

(ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

(ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^3 = x$

مثال: هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنۀ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (تقریب کتاب درسی)

الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$

ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$

پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$

ت) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$

مثال: گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها ($\exists$ یا $\forall$) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

«هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است.»

تست: گزاره‌ی سوری $\exists x \in P; x = 2k + 1$ که در آن P مجموعه‌ی اعداد اول است، به کدامیک از صورت‌های زیر بیان می‌شود؟

- (۱) همه‌ی اعداد اول فرد هستند.
- (۲) همه‌ی اعداد اول هستند.
- (۳) عدد فردی وجود دارد که اول باشد.
- (۴) عدد اولی وجود دارد که فرد باشد.

تست: نقیض گزاره‌ی سوری «همه‌ی کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم هم لذت می‌برند» کدام است؟

- (۱) همه‌ی کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند.
- (۲) برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند.
- (۳) هیچ فرد علاقمند به موسیقی کلاسیک، از تماشای فیلم لذت نمی‌برد.
- (۴) برخی از افرادی که از تماشای فیلم لذت می‌برند، از موسیقی کلاسیک لذت نمی‌برند.

تست: نقیض گزاره سوری $\forall x(F(x) \Rightarrow \sim G(x))$ کدام است؟

- (۱) $\exists x(G(x) \Rightarrow f(x))$
- (۲) $\exists x(\sim F(x) \Rightarrow G(x))$
- (۳) $\exists x(\sim F(x) \wedge G(x))$
- (۴) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

تست: گزاره‌ی سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x, y)$ ، با کدام گزارهء نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

است؟ (تکاور داخل ۹۸)

- (۱) $y - x = 6$
- (۲) $x - y = 6$
- (۳) $x + y = 6$
- (۴) $xy = 6$

تست: کدام گزارهء سوری زیر دارای ارزش درست است؟ (تکاور خارج ۹۸)

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x$
- (۲) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x$
- (۳) $\exists x \in \mathbb{R} : |x + \frac{1}{x}| < 2$
- (۴) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$

🧐 **تست:** اگر Q مجموعه اعداد گویا و Q' مجموعه اعداد گنگ باشد، کدام گزاره سوری زیر نادرست است؟

(۱) $\exists x \in Q'; x^2 \in Q$

(۲) $\exists x \in Q'; \sqrt{3}x \in Q$

(۳) $\exists x \in Q'; x + \sqrt{3} \in Q$

(۴) $\exists x \in Q'; \frac{1}{x} \in Q$

🧐 **تست:** کدام یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x^2 = y^2$

(۲) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; xy \leq 0$

(۳) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x^2 - y^2 = 1$

(۴) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; y^2 - x^2 = 1$

🧐 **تست:** کدام گزاره سوری زیر درست است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; x^2 > y$

(۲) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}; x^2 < y$

(۳) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; x^2 > 2^y$

(۴) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}; x^2 < 2^y$

🧐 **تست:** عبارت $[\forall x \in A (\exists y \in B (x + y < 1 \wedge x - y > -1))]$ معادل است با:

(۱) $\exists x \in A; (\forall y \in B; (x + y \geq 1 \wedge x - y \leq -1))$

(۲) $\exists x \in A; (\exists y \in B; (x + y \geq 1 \wedge x - y \leq -1))$

(۳) $\exists x \in A; (\forall y \in B; (x + y \geq 1 \vee x - y \leq -1))$

(۴) $\exists x \in A; (\exists y \in B; (x + y \geq 1 \vee x - y \leq -1))$

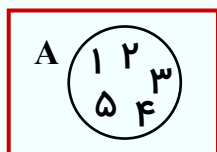
مجموعه: 🤪

بعنوان دسته ای از اشیاء دو بدو متمایز در نظر گرفته می شود که با نام بردن اعضای آن یا بیان خاصیت مشترک اعضای آن مشخص می شود. عبارتی دیگر مجموعه دسته ای از اشیاء متمایز و خوش تعریف است. (یعنی بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه)

مثلاً: 🤪

دانش آموزان شرکت کننده در کنکور ۱۴۰۷ ساکن تهران مجموعه است.

دانش آموزان با استعداد تهران مجموعه نیست. چون با استعداد خودش تعریف نیست.



✓ اعداد طبیعی کمتر از ۶ را به این صورت نشان می دهیم: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

✓ یا با نمادهای ریاضی به صورت مقابل: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$

✓ یا با نمایش هندسی به صورت مقابل (نمودار ون)

ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه جایی عضوهای مجموعه را تغییر نمی دهد.

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 1, 3\}$$

اعضای تکراری در مجموعه شمرده نمی شوند.

$$\{2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7\} = \{2, 5, 7\}$$

تعلق یا عضویت: 🤪

اگر x در مجموعه A باشد می نویسیم $x \in A$ و اگر x در مجموعه A نباشد می نویسیم $x \notin A$.

مثال: 🤪

اگر $A = \{3, 5, 7\}$ آنگاه $3 \in A$ و $9 \notin A$

زیر مجموعه: 🤪

مجموعه A را زیر مجموعه B گویند هر گاه همه اعضای A عضو B باشند و می نویسیم: $A \subseteq B$

مثال: 🤪

اگر $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ آنگاه $A = \{3, 5\}$ زیر مجموعه B می باشد و $C = \{7, 4\}$ زیر مجموعه B نمی باشد

ویژگی‌های زیر مجموعه: 😊

۱. هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. $A \subseteq A$

۲. اگر دو مجموعه زیر مجموعه هم باشند آنگاه با هم مساویند. $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \leftrightarrow A = B$

۳. تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. $\emptyset \subseteq A$

تذکره: مجموعه تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و آن را با $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم. 🤔

۴. هر مجموعه ای زیر مجموعه مرجع می‌باشد. $A \subseteq u$

تذکره: وقتی زیر مجموعه‌های یک مجموعه را مورد بررسی قرار می‌دهیم به آن مجموعه مرجع می‌گویند و آن را با M یا u نشان می‌دهند. 🤔

مثال: مجموعه $A = \{m, n, p, q\}$ را در نظر بگیرید. درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. 🤓

	الف) $\{n\} \in A$		ث) $q \in A$	
	ب) $\{m\} \subseteq A$		ج) $\{m, n\} \subseteq A$	
	پ) $\emptyset \in A$		چ) $\{n, p, r\} \subseteq A$	
	ت) $p \in A$		ه) $A \subseteq A$	

تست: مجموعه‌های $A = \{2\}$ و $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض اند، کدام بیان در مورد آنها درست است؟ 🤓

نادرست است؟

(۱) $A \in B$

(۲) $A \in C$

(۳) $B \in C$

(۴) $A \subset C$

تست: اگر $A = \{a, \{a, \{a\}\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ باشد، کدام گزاره نادرست است؟ 🤓

(۱) مجموعه A دارای ۳۲ زیرمجموعه است.

(۲) $\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq A$

(۳) $\{a, \{b\}, \{a, b\}\} \subseteq A$

(۴) $\{\{a\}, b\} \subseteq A$

🧐 **تست:** اگر $A = \{2\}$ و $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $B \subset C$

(۲) $A \subset B$

(۳) $A \in B$

(۴) $B \in C$

🧐 **مثال:** فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $D = \{3, 4, 5\}$ و $E = \{3, 5\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید: X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟ (قرین کتاب درسی)
(الف) X و B عضو مشترکی ندارند.

(ب) $X \subseteq A$ ولی $X \not\subseteq C$

(پ) $X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$

(ت) $X \subseteq C$ ولی $X \not\subseteq A$

🧐 **مثال:** درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (قرین کتاب درسی)

(الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$

(ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

(ت) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

مثال: مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آن‌ها حکم‌های زیر درست باشند. (قرین کتاب درسی)

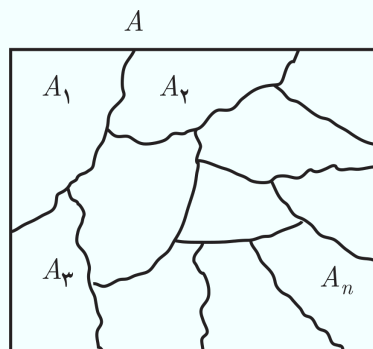
الف) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \notin C$

ب) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \in C$

پ) $A \in B$ و $A \subseteq B$

افراز یک مجموعه

فرض کنیم $A \neq \emptyset$ یک مجموعه و $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیر مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



I) $\forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$

II) $\forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$

III) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟ (کاردرکلاس کتاب درسی)

الف) $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 8, 9\}$

ب) $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{5, 7, 9\}$

ج) $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{7, 9\}$

مثال: فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب

می‌شود. (قرین کتاب درسی)

الف) $\{a, c, e\}$, $\{b\}$, $\{d, g\}$

ب) $\{a, e, g\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e, f\}$

پ) $\{a, b, e, g\}$, $\{c\}$, $\{d, f\}$

ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث) $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{d\}$, $\{f, g\}$, $\{e\}$

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

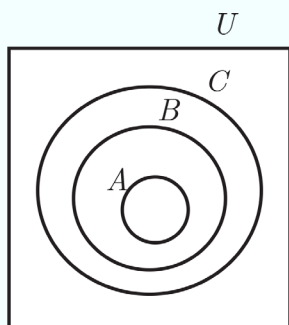
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیرمجموعه B نامیده و می‌نویسند $A \subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \Rightarrow x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه 🤔

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A \subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



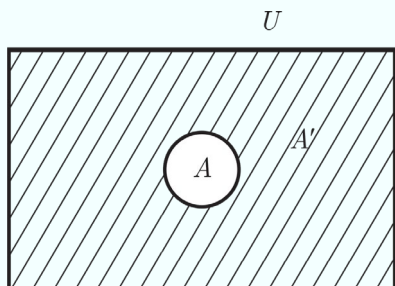
ویژگی ۱: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید $A \subseteq C$.

اثبات: برای اثبات $A \subseteq C$ ، باید ثابت کنیم که: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$. برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x; x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$



ویژگی ۲: فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، و $A \subseteq B$ ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

ویژگی ۳: برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$.

اثبات:

برای اثبات $\emptyset \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی، ارزش مقدم یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\emptyset \subseteq A$.

مثال: اگر A, B, C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید
اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

مثال: برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$. (کاردکلاس کتاب درسی)
اثبات:

$$\forall x: (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم:

$$\forall x: (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

مثال: فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$
آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$. (کاردکلاس کتاب درسی)
اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \dots & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \\ \dots \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow \dots$$

بنابراین داریم:

$$\forall x: [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow \dots$$

مثال: فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$
آن گاه $(A \cup B) \subseteq C$. (کاردکلاس کتاب درسی)
اثبات:

🧐 **مثال:** فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$ (خاصیت جابجایی اشتراک) (کتاب درسی)

🧐 **مثال:** فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A - B = \emptyset$ (کتاب درسی)

🧐 **مثال:** ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$ (کتاب درسی)

🧐 **مثال:** فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آنگاه: (کتاب درسی)

(الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$ (ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

مثال: مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$

آن‌گاه: (کتاب درسی)

(الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$

(ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

مثال: (الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$. (کتاب درسی)

(ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

مثال: هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید: (کتاب درسی)

(الف) $B - A = B$

(ب) $A - B = A$

مثال: با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای « $\cup$ » و « $\cap$ » اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید: (کاردکلاس کتاب درسی)

اثبات: ثابت کنید برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U ، داریم:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee \dots\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in B \vee \dots\}$$

$$= B \cup A$$

تعریف اجتماع:

جابه‌جایی « $\vee$ »:

تعریف اجتماع:

اثبات: ثابت کنید برای سه مجموعه دلخواه A ، B ، C از مجموعه مرجع U ، داریم:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cup C) = \{x \in U \mid \dots \vee x \in (B \cup C)\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee \dots)\}$$

$$= \{x \in U \mid \dots \vee x \in B) \vee x \in C\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in (\dots) \vee x \in C\}$$

$$= (A \cup B) \cup C$$

تعریف اجتماع:

تعریف اجتماع:

شرکت‌پذیری « $\vee$ »:

تعریف اجتماع:

تعریف اجتماع:

اثبات: با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری « $\cup$ » نسبت به « $\cap$ » را ثابت کنید.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\forall x; [x \in A \cup (B \cap C)]$$

$$\Rightarrow \{x \in A \vee (x \in \dots)\}$$

$$\Rightarrow \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \dots)\}$$

$$\Rightarrow \{(x \in A \vee \dots) \wedge (\dots \vee x \in C)\}$$

$$\Rightarrow [x \in \dots \wedge x \in \dots]$$

$$\Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap \dots]$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq \dots$$

تعریف اجتماع:

تعریف اشتراک:

توزیع‌پذیری « $\vee$ » نسبت به « $\wedge$ »:

تعریف « U »:

تعریف اشتراک:

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq \dots$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از « $A \cup$ » است.)

مشخص کردن اعضای مجموعه‌هایی که با نماد ریاضی نمایش داده می‌شوند 🤗

تست: مجموعه‌ی $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq -n, 2^m \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ مفروض است. مجموعه‌ی A_3 چند عضو 🧐

دارد؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

تست: مجموع تمام عضوهای مجموعه‌ی $A = \{k^2 + 1 : k \in \mathbb{N}, k < 5\}$ کدام است؟ 🧐

۳۴ (۱)

۳۵ (۲)

۳۶ (۳)

۳۷ (۴)

تست: کدام مجموعه تهی است؟ 🧐

(۱) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4, 3x = 6\}$

(۲) $B = \{x \in \mathbb{Z} : x + 5 = 5\}$

(۳) $C = \{x \in \mathbb{Z} : x > 3, 2^x < 10\}$

(۴) $D = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 8x\}$

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟ (کاردرکلاس کتاب درسی) 🧐

(الف) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \text{ و } 2x = 4\}$

(ب) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = 8\}$

(پ) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\}$

(ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید. (کاردکلاس کتاب درسی)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 = m\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 1 = 0\}$$

$$S = \{a \in S \mid \text{فضای نمونه پرتاب یک تاس است}\}$$

تساوی دو مجموعه: 🧐

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B و هر عضو B عضو A باشد؛ یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت: $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2\}$ ، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل) (آخرین کتاب درسی)

الف) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

پ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

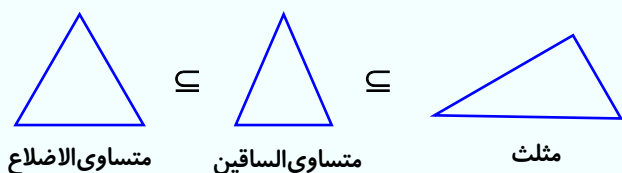
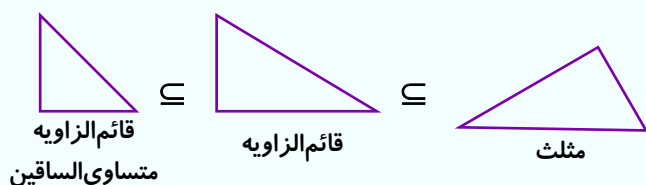
مثال: اگر $A = \{2, x + 2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x - y\}$ و $A = B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید. (قرین کتاب درسی)

زیر مجموعه در اشکال هندسی

به چهار ضلعی هایی که زیر مجموعه ی هم محسوب می شوند توجه کنید:



به مثلث هایی که زیر مجموعه ی هم محسوب می شوند توجه کنید :



مثال: مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید: (قرین کتاب درسی)

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است}\}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

الف) $D \subseteq C$

ب) $B \subseteq D$

پ) $A \subseteq B$

ت) $D \subseteq A$

تست: اگر چهار مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \text{ مستطیل است}\}$ و $B = \{x \mid x \text{ لوزی است}\}$ و x مربع

است $C = \{x \mid x \text{ متوازی‌الاضلاع است}\}$ و $D = \{x \mid x \text{ مفروض باشند، آن گاه کدام گزینه درست است؟}$

۱) $A \subseteq C$

۲) $C \subseteq B$

۳) $A \subseteq B$

۴) $D = A \cap B$

مثلاً یک مجموعه ۷ عضوی $\binom{7}{2}$ تا زیر مجموعه ۲ عضوی $\binom{7}{4}$ تا زیر مجموعه ۴ عضوی و ... دارد.

مثال: تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی چند تا است؟

$A = \{a, b, c\} \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها $= 2^3$

$A = \{a, b, c\} \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی $= 2^3 - 1 = 7$

😊 زیر مجموعه محض (سره):

به تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه بجز خود آن مجموعه زیر مجموعه محض یا سره می‌گویند.

🧐 **مثال:** تعداد زیر مجموعه‌های محض غیر تهی یک مجموعه n عضوی چندتاست؟

🧐 **مثال:** مجموعه A را در نظر بگیرید. اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۴۸

واحد افزایش می‌یابد. مشخص کنید A چند عضو دارد؟ (کتاب درسی)

تست: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $k + 3$ عضوی، ۵۶ عدد بیشتر از تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه k عضوی است. مقدار k کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

تست: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع باشد، چند مجموعه سه عضوی مانند A وجود دارد به طوری که $A \cap \{1, 2, 3\}$ مخالف تهی باشد؟ (قلم چی)

(۱) ۲۷

(۲) ۳۱

(۳) ۳۲

(۴) ۳۵

مثال: اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟ (قدین کتاب درسی)

تست: اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$, $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (کنکور خارج ۹۴)

(۱) $A - B = C$

(۲) $B - C = \emptyset$

(۳) $B - C = \{1, 2\}$

(۴) $A - B = \{C\}$

تست: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ ، مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۱۴

(۴) ۷

تست: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ باشد، مجموعه‌ی $A - \{A\}$ چند زیرمجموعه سره‌ی ناتهی دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۱۴

تست: اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 3x\}$ ، آن گاه تعداد زیرمجموعه‌های سره و

غیر تهی مجموعه‌ی $A - B$ کدام است؟ (نگور خارج ۹۲)

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۱۴

تست: چند زیرمجموعه از مجموعه $\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\}$ عضو $\{b, a\}$ را ندارد؟ (نگور داخل ۹۱)

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

تست: اگر $A = \{\{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟ (لنگورداخل ۹۸)

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

تست: مجموعه A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد

زیرمجموعه‌های $(B \cup A)'$ کدام است؟ (لنگورخارج ۹۸)

(۱) ۱۶

(۲) ۳۲

(۳) ۴۸

(۴) ۶۴

تست: تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه A ، ۹۷ تا کمتر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B است. اگر

تعداد عضوهای B از دو برابر تعداد عضوهای A سه تا کمتر باشد، مجموعه A چند زیرمجموعه شامل عضو

خاص a دارد؟

(۱) ۱۵

(۲) ۳۲

(۳) ۶۴

(۴) ۱۶

تست: در چند زیر مجموعه از مجموعه $\{12, 13, 15, 18, 23, 24, 25, 26\}$ حاصل ضرب کوچک ترین و

بزرگ ترین عضو، مضرب ۱۰ است؟ (نگور داخل ۱۴۰۳-تیرماه)

۵۹ (۱)

۶۰ (۲)

۶۱ (۳)

۶۲ (۴)

تست: مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی چند زیر مجموعه دارد به طوری که در هر کدام از آن ها بزرگ ترین

عضو مجموعه سه برابر کوچک ترین عضو مجموعه باشد؟ (فلم چی)

۴۲ (۱)

۴۰ (۲)

۳۴ (۳)

۳۲ (۴)

مجموعه توانی A: 🤔

به مجموعه تمام زیر مجموعه‌های A مجموعه توانی A می‌گویند و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال: اگر $A = \{a, b\}$ آنگاه $P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\}\}$ 🤓

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A = تعداد عضوهای مجموعه توانی A

تست: اگر A مجموعه اعداد دو رقمی و $B = \{\forall k : k \in A\}$ آنگاه مجموعه توانی $A \cap B$ چند عضو دارد؟ 🤓

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

تست: اگر $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ ، مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟ 🤓

(۱) ۱۲۸

(۲) ۶۴

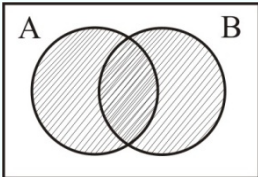
(۳) ۲۵۶

(۴) ۵۱۲

قوانین جبر مجموعه‌ها: 🌟

اجتماع دو مجموعه: 😊

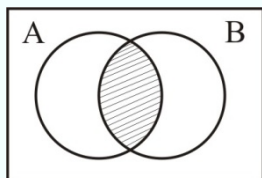
اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است شامل همه اعضای A و B.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه: 😊

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به هر دو مجموعه A و B باشد.

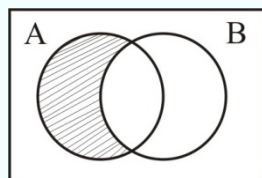


$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

تفاضل دو مجموعه: 😊

تفاضل دو مجموعه A و B، $(A-B)$ مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به A بوده ولی

$$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\} \quad \text{متعلق به B نباشند.}$$



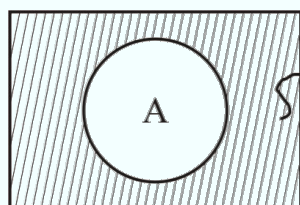
🤔 **توجه:** کلاً هر وقت خواستید تفاضل دو مجموعه را حساب کنید در جریان باشید که...

= تفاضل دو مجموعه

متمم يك مجموعه نسبت به مجموعه مرجع: 😊

متمم مجموعه دلخواه A نسبت به مجموعه M مجموعه‌ای است شامل همه اعضای

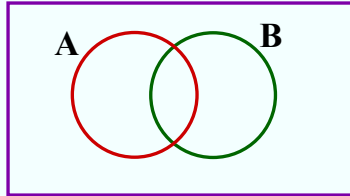
$$A' = \{x : x \in M, x \notin A\} \quad \text{متعلق به M که در A قرار ندارند.}$$



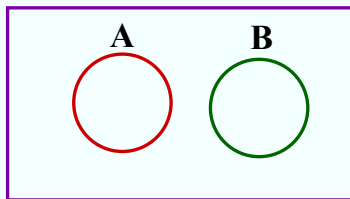
😊 تمام روابطی که از مجموعه‌ها باید بدانید همین چنتاست:

روشی زیبا برای حل تست‌های جبر مجموعه‌ها: 😊

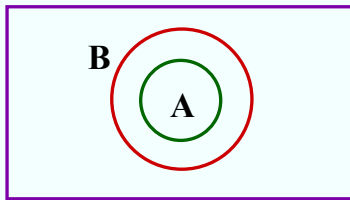
هرگاه در صورت سوال بحث روی ۲ مجموعه بود شکل را اینگونه رسم کنید.



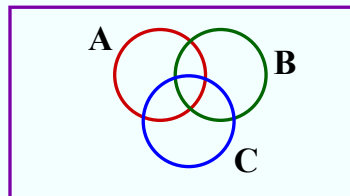
مگر اینکه مسأله شرطی داشته باشد که در این صورت متناسب با شرط مسأله شکل می‌کشیم مثلاً:



✓ اگر بگویند A و B جدا از هم اند $(A \cap B = \emptyset)$ ←



✓ اگر بگویند $A \subseteq B$ ←

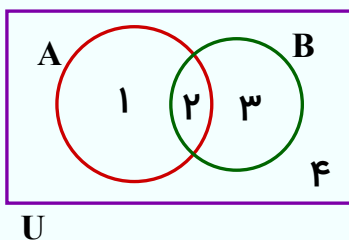


و هرگاه در صورت سوال بحث روی ۳ مجموعه بود شکل را اینگونه رسم کنید.

و باز هم اگر شرط خاصی روی صورت سوال بود متناسب با شرط شکل می‌کشیم.

✓ در کل اگر در این تیپ سوالات چه برای ۲ مجموعه چه برای ۳ مجموعه طراح اشاره به شرط خاصی نداشت حتماً مجموعه‌ها اشتراک دارند.

🤔 **توجه شود :**



$$A = \{1, 2\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{1\}$$

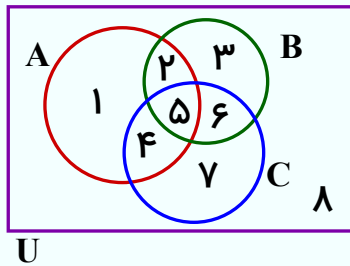
$$A' = \{3, 4\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$B - A = \{3\}$$

$$B' = \{1, 4\}$$



$$A = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{2, 5\}$$

$$A - B = \{1, 4\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$A \cap C = \{4, 5\}$$

$$A - C = \{1, 2\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$B \cap C = \{5, 6\}$$

$$B - C = \{2, 3\}$$

$$A \cap B \cap C = \{5\}$$

تست: اگر A و B دو ناتهی باشند، حاصل $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ برابر کدام است؟

۱) A

۲) B

۳) $A \cup B$

۴) $A \cap B$

تست: اگر A و B دو مجموعه ی غیر تهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B'

۲) $\emptyset$

۳) $A \cap B$

۴) $A - B$

تست: اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه

$A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟ (نگاه داخل ۱۴۰۱)

۱) $(A - B)'$

۲) $B - A$

۳) B

۴) $\emptyset$

تست: اگر A و B دو مجموعه باشند متمم $(B' - A) \cup (A' - B)$ کدام است؟

۱) $A \cap B$

۲) $A \cup B$

۳) $A' \cap B'$

۴) $A' \cup B'$

تست: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ کدام

است؟

(۱) $A' - B'$

(۲) $\emptyset$

(۳) A'

(۴) $(A - B)'$

تست: اگر $A' \subset B$ باشد حاصل $[((B' - A) - (A - B)) \cup B']'$ کدام است؟

(۱) A

(۲) B'

(۳) A'

(۴) B

تست: حاصل $(B - C) \cap [(A \cup B) \cap (C - A)']$ کدام است؟

(۱) B

(۲) $B - C$

(۳) C

(۴) $C - B$

تست: اگر A ، B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $((A - B)' - (B - C)) - C$

با کدام مجموعه برابر است؟ (نگوردی ۱۴۰۱)

(۱) $A' - (B \cup C)$

(۲) $B - (A \cup C)$

(۳) $C - (A \cup B)$

(۴) $(A' \cup B') - C$

تست: اگر A و B و C سه مجموعه‌ی غیر تهی باشند به طوری که $A \subset B$ ، آنگاه مجموعه‌ی $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟

- (۱) B
- (۲) $A \cap C$
- (۳) A
- (۴) $A \cap C'$

تست: مجموعه $(A - B) \cup (A \cap C)$ همواره با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $(A - B) - C$
- (۲) $A - (B - C)$
- (۳) $(A \cap C) - B$
- (۴) $A - (B \cup C)$

تست: اگر A و B دو مجموعه از مجموع مرجع U باشند، آنگاه حاصل $[A \cap (A - B)'] \cap [B \cap (A \cup B)']$ کدام است؟

- (۱) A
- (۲) B'
- (۳) U
- (۴) $\emptyset$

تست: اگر رابطه $[(A' - B) \cup (B' \cup A)] - X = A$ می‌باشد. اگر $A \cap B \neq \emptyset$ و دو مجموعه غیر تهی و $A \cap B \neq \emptyset$ می‌باشد. اگر رابطه $[(A' - B) \cup (B' \cup A)] - X = A$ برقرار باشد، X' کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) A
- (۲) $A \cup B$
- (۳) $A \cap B$
- (۴) مسئله جواب ندارد.

تست: اگر U مجموعه مرجع و $[A \cup (A \cap B)] \cup [B \cap (A \cup B)] = B$ باشد آنگاه $B' - A'$ برابر با کدام مجموعه است؟

- (۱) A
- (۲) B
- (۳) U
- (۴) $\emptyset$

تست: مجموعه $((A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)))$ با کدام مجموعه برابر است؟ (کنکور داخل ۹۹)

- (۱) $A \cup B'$
- (۲) $A \cap B'$
- (۳) A
- (۴) B'

تست: ساده شده عبارت $(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)]$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۴ - اردیبهشت)

- (۱) $A - B$
- (۲) $B - A$
- (۳) B
- (۴) A

تست: اگر A, B, C سه مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B \subseteq C$ ، آنگاه حاصل $(A' \cup B') \cap (A' \cup C')$ کدام است؟ (U مجموعه مرجع است). (آزمون گزیننده)

- (۱) A'
- (۲) B'
- (۳) $\emptyset$
- (۴) U

تست: اگر A, B و C سه مجموعه و $A' \subseteq B' \subseteq C'$ باشد، حاصل

عبارت $[A - (B \cup C)] \cap [A - (B \cap C)]$ همواره کدام است؟ (قلم چی)

(۱) $\emptyset$

(۲) $A - B$

(۳) $A - C$

(۴) $B - C$

تست: اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $[B' - (A' \cap B')] \cup [(A' \cup B') - (A \cup B)]$ همواره

برابر کدام است؟ (قلم چی)

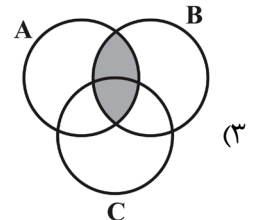
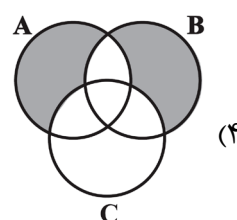
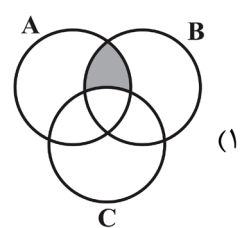
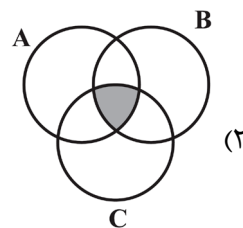
(۱) B'

(۲) A'

(۳) A

(۴) B

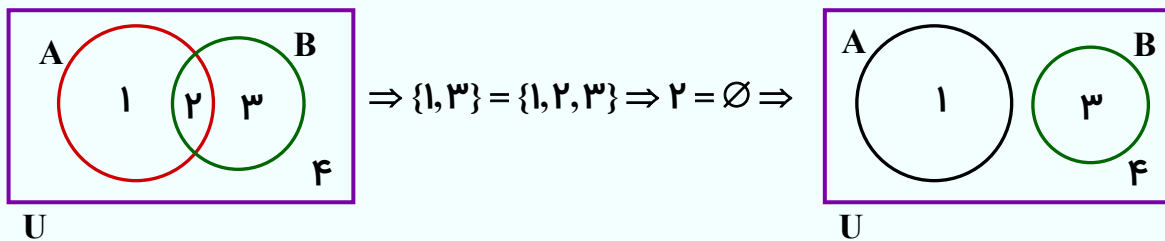
تست: کدام گزینه پیشامد $(A \text{ و } B \text{ رخ دهد ولی } C \text{ رخ ندهد})$ را نشان می دهد؟ (قلم چی)



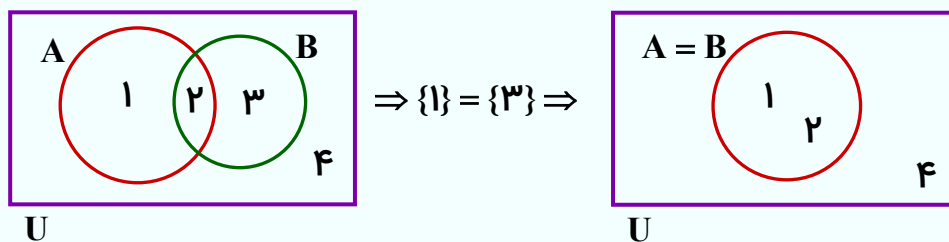
ساده کردن عبارات مجموعه‌ای با شرط ویژه 🤔

بعضی اوقات یک تساوی بین دو عبارت مجموعه‌ای داده می‌شود و ساده شده‌ی یک عبارت مجموعه‌ای دیگر را از ما می‌خواهند. در این موارد، ابتدا بدون توجه به شرط داده شده یک شکل رسم می‌کنیم (نمودار ون در حالت کلی) و طرفین تساوی داده شده را براساس آن ساده می‌کنیم، سپس براساس نتیجه‌ی حاصل شده شکل را اصلاح کرده و یک شکل جدید رسم می‌کنیم و عبارت خواسته شده را براساس شکل جدید ساده می‌کنیم.

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$



$$A - B = B - A$$



🧐 **تست:** اگر $((A - B) \cup (B - A))' = A' \cap B'$ باشد، مجموعه‌ی $B' - A'$ با کدام مجموعه برابر است؟

- A (۱)
- A' (۲)
- ∅ (۳)
- B' (۴)

🧐 **تست:** اگر A و B دو مجموعه و $A - B = A$ باشد، مجموعه $B - [A - (B - A)]$ همواره برابر کدام

است؟ (فلم چی)

- A (۱)
- $A \cap B$ (۲)
- B (۳)
- $A \cup B$ (۴)

تست:  دو زیر مجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد

همواره برقرار است؟ (داخل ۱۴۰۴ - اردیبهشت)

(۱) $B = U$

(۲) $A = U$

(۳) $B = A$

(۴) $A = \emptyset$

تست:  اگر A و B دو مجموعه و $A - B = A \cap B$ باشد، آنگاه کدام مجموعه همواره برابر مجموعه مرجع

است؟ (قلم چی)

(۱) $A \cap B'$

(۲) $A' \cap B'$

(۳) $A \cup B'$

(۴) $A' \cup B'$

تست:  اگر $A \cup (B - A) = B$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \subseteq B$

(۲) $B \subseteq A$

(۳) $A \cap B = \emptyset$

(۴) $B = \emptyset$

تست:  فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$. اگر $((A' - B)' \cap C)' = B$ ،

کدام عبارت درست است؟ (تکورد داخل ۱۴۰۰)

(۱) $B \subseteq A$

(۲) $A \cap B = \emptyset$

(۳) $A \subseteq B$

(۴) $A - B$

اگر در صورت تست چهارم مجموعه داشتیم 😊

🧐 **تست:** اگر $A \subseteq C$ باشد ساده شده ی $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap D'))]$ کدام است؟

۱) $A \cap D$

۲) $A \cup D$

۳) $B \cap C$

۴) $B \cup C$

روش کلی اثبات عباراتی که به صورت جبر مجموعه‌ای داده می‌شوند. (تشریحی) 😊

۱. از آن طرف شروع کنید که عبارات بیشتری دارد.
۲. هر جا منفی دیدید با رابطه $A - B = A \cap B'$ به اشتراک تبدیل کنید.
۳. هر جا عباراتی به شکل $(\dots \cap \dots)'$ یا $(\dots \cup \dots)'$ دیدید از دموگان استفاده کنید.
۴. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها (جابجایی - توزیع پذیری و ...) کاری کنید که مجموعه و متممش در یک پرانتز قرار گیرند.
۵. با استفاده از روابط $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup U = U$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$ به طرف دوم تساوی خواهید رسید.

🧐 **مثال:** با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید. (مقرن کتاب درسی)

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مثال: درستی هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید. (تقریب کتاب درسی)

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

مثال: هر یک از عبارات‌های زیر را ساده کنید: (تقریب کتاب درسی)

الف) $(A' \cap B) \cup [B \cap A - B'] \cap (B \cup A)$

ب) $(A \cup B) - B$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

تعمیم اجتماع و اشتراک: 😊

محاسبه اجتماع و اشتراک چند مجموعه

$\bigcup_{i=1}^n A_i =$ اجتماع بازه ها از بازه ی اول تا بازه ی n ام

$\bigcap_{i=1}^n A_i =$ اشتراک بازه ها از بازه ی اول تا بازه ی n ام

🧐 **تست:** اگر $A_n = [n-1, n+1]$ ، آنگاه مجموعه $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

(۱) $\{x : 1 \leq x \leq 5\}$

(۲) $\{x : 0 \leq x \leq 5\}$

(۳) $\{x : 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

(۴) $\{x : 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

🧐 **تست:** اگر n عدد طبیعی و A_n بازه ی $((-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

🧐 **تست:** اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت

است؟ (تکورداخل ۹۲)

(۱) $\emptyset$

(۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

(۳) $[-1, 1]$

(۴) $[-2, -1) \cup (1, 2]$

🧐 **تست:** اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ آن گاه مجموعه‌ی $A_4 \cap A_3$ چند زیرمجموعه

دارد؟

(۱) ۸

(۲) ۱۶

(۳) ۳۲

(۴) ۳۶

🧐 **تست:** اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 8-i\}$ مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱۳

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۶

🧐 **تست:** اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد، مجموعه‌ی $(A_8 - A_4) \cup A_1$ چند

عضو دارد؟ (تک‌گزینه‌ای ۶۶)

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

ضرب دکارتی بین دو مجموعه: 😊

ضرب دکارتی دو مجموعه A و B که آن را با نماد $A \times B$ نشان می‌دهند. مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی است که مولفه اول متعلق به A و مولفه دوم متعلق به B است.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

مثال: 😊 اگر $A = \{5, 6\}$ و $B = \{2, 4, 8\}$ آنگاه مطلوب است:

$$A \times B =$$

$$B \times A =$$

نتیجه ۱: 😊 ضرب دکارتی خاصیت جابجایی ندارد مگر

$$n(B \times A) = n(A \times B) = n(A) \times n(B) : \text{نتیجه ۲} : 😊$$

ضرب دکارتی مجموعه‌های پیوسته: 🤩

مثال: 🧐 اگر $A = [1, 4]$ و $B = [0, 2]$ مطلوب است: $A \times B$ و $B \times A$

مثال: 🧐 اگر $A = [2, +\infty)$ و $B = (-\infty, 3]$ مطلوب است $A \times B$ و $B \times A$

تست: 🧐 اگر $A = [1, 4]$ و $B = (-1, 3]$ باشند. مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحه مختصات کدام

است؟ (نگور خارج ۹۹)

(۱) ۷

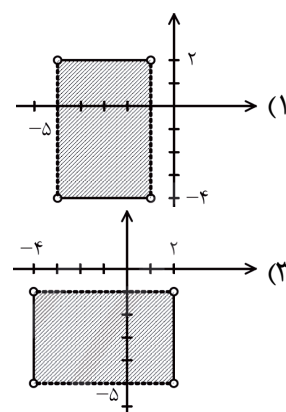
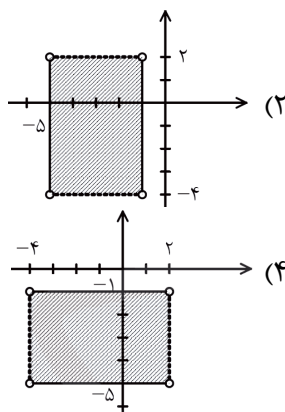
(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

تست: 🧐 اگر $A = \{x - 1, 2x + 3\}$ و $B = \{a\}$ دو مجموعه باشند که $A \cup B = A \cap B$ ، $[a, -1] \times (x, 2)$ کدام

است؟



چند ویژگی از ضرب دکارتی: 🤔

۱- ضرب دکارتی روی اجتماع، اشتراک، تفاضل دو مجموعه از چپ و راست توزیع پذیر است.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

۲- تهی در ضرب دکارتی مثل صفر است در ضرب معمولی.

$$A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset$$

$$A \times B = A \times C \xrightarrow{A \neq \emptyset} B = C$$

اشتراک دو ضرب دکارتی 😊

برای محاسبه‌ی اشتراک $A \times B$ و $C \times D$ دامنه‌ها را با هم اشتراک گرفته، سپس در هم ضرب می‌کنیم

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \underbrace{(A \cap C)}_{\text{اشتراک دامنه‌ها}} \times \underbrace{(B \cap D)}_{\text{اشتراک دامنه‌ها}}$$

توجه توجه !!! 🤔

اگر A, B, C, D چهار مجموعه‌ی ناتهی باشند آن گاه:

$$1) A \times B = C \times D \Rightarrow \begin{cases} A = C & \text{دامنه با دامنه} \\ B = D & \text{بُرد با بُرد} \end{cases} \quad 2) (A \times B) \subset (C \times D) \Rightarrow \begin{cases} A \subset C & \text{دامنه با دامنه} \\ B \subset D & \text{بُرد با بُرد} \end{cases}$$

🧐 **تست:** اگر A و B و C سه مجموعه‌ی غیر تهی باشند، از کدام تساوی الزاماً $A=B$ نتیجه می‌شود؟

$$(1) A \times C = B \times C$$

$$(2) A \cap C = B \cap C$$

$$(3) A \cup C = B \cup C$$

$$(4) A \times (B - C) = (A - C) \times B$$

🧐 **تست:** اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی و $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ آنگاه مجموعه‌ی $A - B$ برابر کدام

است؟

$$(1) A$$

$$(2) \emptyset$$

$$(3) B - A$$

$$(4) A \Delta B$$

تست: اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند و $(A \times B) - (B \times A) = \emptyset$ باشد، کدام مجموعه غیر تهی

است؟

(۱) $A \cap B$

(۲) $A - B$

(۳) $A \Delta B$

(۴) $(B \times A) - (A \times B)$

مثال: اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ و $B = \{x + 1, 4, -2\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار

برای $(x + y + z)$ را بیابید. (قرین کتاب درسی)

تست: در مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x + 2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t - 1\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$

باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟ (نگور داخل ۹۹)

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

تست: اگر $A = \{x = 3k : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 50\}$ و $B = \{x = 5k : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 50\}$ آن گاه مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ چند عضو دارد؟

۹۹ (۱)

۹۱ (۲)

۷۸ (۳)

۸۴ (۴)

تست: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشند، مجموعه $(A \cap B') \times (A \cup B)'$ چند عضو دارد؟

۸ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

۱۵ (۴)

مثال: با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید. (قرین کتاب درسی)

الف) $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$

ب) $A = \{3, 4\}, B = (1, 5]$

پ) $A = [2, 6], B = [3, 8]$

ت) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$

ث) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$

🧐 تست: $A = \{2, 3x - 2y, 3\}$, $B = \{-1, 3, 3y - 4x\}$, $C = \{x, y\}$ و $D = \{x^2, y^2\}$ مفروض اند.

اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه مجموعه $C \times D - C^2$ چند عضو دارد؟ (قلم چی)

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

🧐 تست: اگر $n((A \cup B) \times B) = ۱۳۲$ و $n((A \cap B) \times B) = ۷۷$ باشد، حاصل $n(A - B) + n(B - A)$ کدام

است؟ (قلم چی)

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

🧐 **تست:** اگر N مجموعه اعداد طبیعی، $C = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $K = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ باشد، کدام یک از گزینه‌های

زیر متعلق به مجموعه $(N \times C) \cap (K \times C)$ می‌باشد؟ (قلم‌چی)

(۱) $(8, 2)$

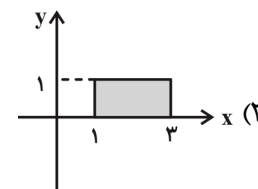
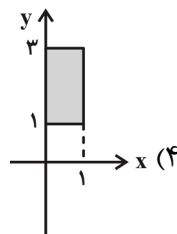
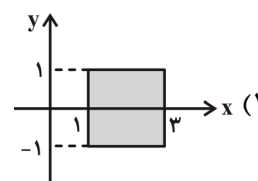
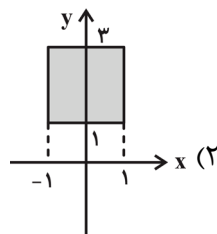
(۲) $(9, 4)$

(۳) $(16, 6)$

(۴) $(27, 12)$

🧐 **تست:** اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x^4 \geq 0\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 1\}$ باشد، نمودار $A \times B$ کدام

است؟ (قلم‌چی)



🧐 **تست:** اگر $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، مجموعه $A \times B$ دارای چند زیرمجموعه

بوده به طوری که در آن زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول و دوم آن برابر هستند، موجود نباشد؟ (قلم‌چی)

(۱) 2^6

(۲) 2^{10}

(۳) 2^{12}

(۴) 2^{14}

🧐 **تست:** اگر $n(A \cap B) = 2$ ، $n(A) = 5$ و $n((A \cup B) \times B) = 54$ باشد، $n(B)$ کدام است؟ (قلم چی)

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

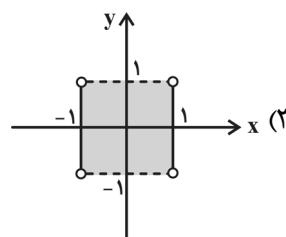
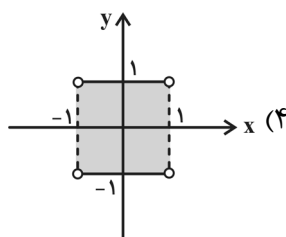
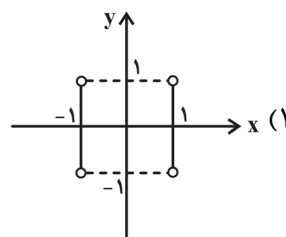
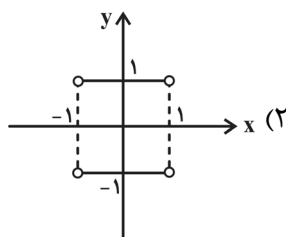
🧐 **تست:** اگر مجموعه $A \times B$ دارای ۸ عضو و مجموعه $B \times C$ دارای ۱۳ عضو باشد، در این صورت مجموعه $C \times A$ چند عضو می باشد؟ (قلم چی)

- (۱) ۵۲
- (۲) ۶۴
- (۳) ۱۰۴
- (۴) ۱۶۹

🧐 **تست:** اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |2x - 1| \leq 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq \sqrt{x}\}$ باشند، مجموعه $A \times B - B^2$ چند زیرمجموعه دارد؟ (قلم چی)

- (۱) ۴
- (۲) ۸
- (۳) ۱۶
- (۴) ۶۴

🧐 **تست:** اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 1\}$ و $B = [-1, 1]$ باشد، نمودار $A \times B - B \times A$ کدام است؟ (قلم چی)



🧐 **تست:** فرض کنید، $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ باشند، در این صورت

$A \times B - B \times A$ دارای چند زیرمجموعه است؟ (قلم چی)

(1) ۳۲

(2) ۶۴

(3) ۲۵۶

(4) ۱۶