

۴. به چند طریق می‌توان از بین ۳ ریاضی‌دان، ۳ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم‌رشته نباشند؟

راه اول: ۲۷ (۱)

۳۳ (۲)

۵۴ (۳)

۶۶ (۴)

$$\binom{9}{2} - \left[\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} \right] = 36 - 9 = 27$$

راه دوم:

$$\binom{3}{2} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 27$$

انتخاب اول

هم‌رشته نفر

۵ (۱)

۵. نقیض گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{R}; \sim (x < 0) \vee (x + \frac{1}{x} \leq 2)$ کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad (1)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (2)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2) \quad (3)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (4)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : (x \not< 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2)$$



$$x > 0$$



$$x + \frac{1}{x} \leq 2$$

۵ (۱)

۲۳. از کارگران مشغول به کار در کارگاهی یک نمونه ۷ نفره انتخاب شده است. اگر داده‌های ۲۱، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷ و ۳۵ درآمد ماهیانه آن‌ها بر حسب میلیون تومان باشد، خط فقر در این کارگاه چند میلیون تومان برآورد می‌شود؟

$$\bar{x} = \frac{21 + 21 + 22 + 24 + 25 + 27 + 35}{7} = \frac{175}{7} = 25$$

- ۱۰/۵ (۱)
۱۲/۵ (۲)
۲۱ (۳)
۲۵ (۴)

$$\text{خط فقر} = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

جواب

۲۴. در یک خانواده k فرزندی، می‌دانیم تمام فرزندان از یک جنس نیستند. به ازای کدام مقدار از k، احتمال اینکه دقیقاً ۳ - k فرزند از این خانواده پسر باشد، $\frac{5}{18}$ است؟

$$n(s) = 2^k - 2$$

- ۵ (۱)
۶ (۲)
۷ (۳)
۸ (۴)

$$P = \frac{\binom{k}{k-3}}{2^k - 2} = \frac{5}{18} \rightarrow k = 7$$

تکلیف

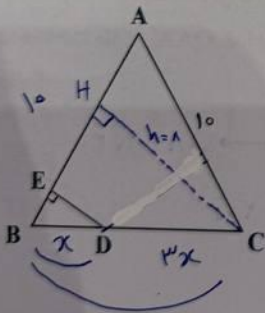
۲۵. داوطلبی به هر ۵ سؤال یک آزمون پنج گزینه‌ای به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال آنکه تنها به ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، کدام است؟

$$\binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{32}{625}$$

- (۱) $\frac{4}{625}$
 (۲) $\frac{16}{625}$
 (۳) $\frac{64}{625}$
 (۴) $\frac{32}{625}$ ✓

تکرار!

۲۶. در شکل زیر، $AB = AC$ و $BD = \frac{1}{4}BC$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۰ باشد، طول ED کدام است؟



$$8 = \frac{1}{2} \times h \times 10 = 40 \rightarrow h = 8$$

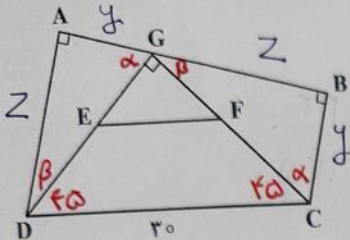
$$\triangle BCH \text{ مثلث: } \frac{x}{4x} = \frac{ED}{8}$$

$$\rightarrow ED = 2$$

- (۱) $\sqrt{5}$
 (۲) $\sqrt{6}$
 (۳) ۲ ✓
 (۴) ۳

تکرار!

۲۷. در شکل زیر، چهار ضلعی‌های EFCD دوزنقه متساوی الساقین است. اگر طول اضلاع دوزنقه ABCD اعداد صحیح مثبت باشند، طول ضلع AB کدام است؟



$$GD = GC = x$$

$$x^2 + x^2 = 30^2 \rightarrow 2x^2 = 900$$

$$x^2 = 450$$

$$y^2 + z^2 = 450 \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 21 \end{cases}$$

$$y + z = 24$$

۲۴ (۱)

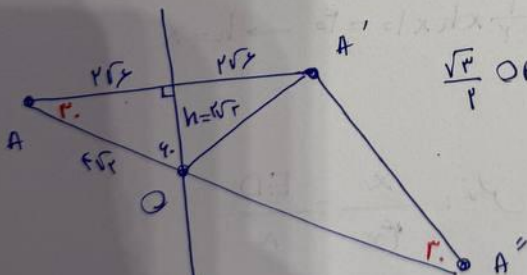
۲۵ (۲)

۲۳ (۳)

۲۶ (۴)

نکته

۲۸. نقطه A' که تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و نقطه A'' تصویر نقطه A تحت دوران حول نقطه A' به اندازه 120° است. اگر فاصله نقطه A از خط d برابر $2\sqrt{6}$ و O نقطه برخورد پاره خط AA'' با خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟



$$\frac{\sqrt{3}}{2} OA = 2\sqrt{6} \rightarrow OA = 4\sqrt{2}$$

$$h = 2\sqrt{6}$$

$2\sqrt{3}$ (۱)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$6\sqrt{3}$ (۳)

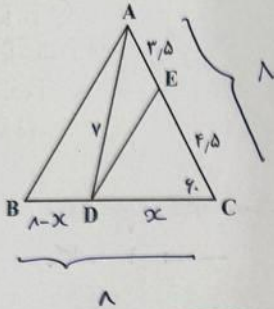
$8\sqrt{3}$ (۴)

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 4\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$

توجه

۲۹. در مثلث متساوی الاضلاع ABC شکل زیر، طول ضلع BD کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

$$\Delta ADC \sim \Delta BEC \rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{DC}{EC} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-x}{4/5} \rightarrow 4 = \sqrt{3}(1-x) \rightarrow 4 = \sqrt{3} - \sqrt{3}x \rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{3} - 4 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}$$

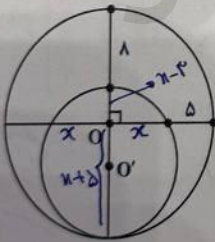
$$4 = \sqrt{3} - \sqrt{3}x \rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{3} - 4 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 - 1x - 15 = 0$$

$$(x-5)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-3 \end{cases}$$

تورج!

۳۰. در شکل زیر، دو دایره به مرکزهای O و O' مماس درون هستند. طول خط‌المركزین کدام است؟



$$R = x + 5$$

$$r = x + 1$$

$$R - r = 2x + 2$$

$$R - r = 4$$

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۳/۵
(۴) ۴/۵

تورج!

۳۱. اگر $\vec{a} = (1, -1, -1)$ باشد، حاصل $\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$ کدام است؟

$$a_{xi} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$k \times (a_{xi}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \textcircled{i}$$

$$k \times a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow i - k$$

$$(k \times a)_{xi} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \textcircled{-k}$$

- $\vec{i} - \vec{k}$ (۱)
- $-\vec{i} - \vec{k}$ (۲)
- $\vec{i} + \vec{k}$ (۳)
- $-\vec{i} + \vec{k}$ (۴)

۳۱

۳۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & x & -1 \\ -1 & 2 & x & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & y-5 \\ -3x-4 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{صف}} \begin{bmatrix} y=5 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x-4 & \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{صف}} \begin{bmatrix} x=-1 & \end{bmatrix}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-1}{5} = \textcircled{-\frac{1}{5}}$$

- $\frac{5}{3}$ (۱)
- $\frac{3}{5}$ (۲)
- $-\frac{5}{3}$ (۳)
- $-\frac{3}{5}$ (۴)

۳۳. برای ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B، اگر $(AB)^{-1}A^3B = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس

۳A کدام است؟

$$\cancel{B^{-1}A^{-1}A^3B} = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$$

$$|A|^2 = 10|A|^2 - 4|A| \rightarrow$$

$$9|A|^2 - 4|A| = 0 \rightarrow |A|(9|A| - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = \frac{4}{9} \end{cases}$$

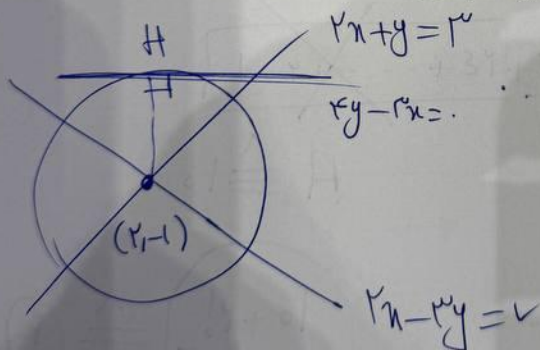
$$|3A| = 3^2 \times \frac{4}{9} = 4$$

تورک!

- ۴ (۱)
- ۲ (۲)
- $\frac{4}{3}$ (۳)
- $\frac{2}{3}$ (۴)

۳۴. دایره C بر خط $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اگر معادلات دو وتر مساوی و منصف هم از دایره C، خطوط

$2x + y = 3$ و $2x - 3y = 7$ باشند، شعاع دایره کدام است؟



$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

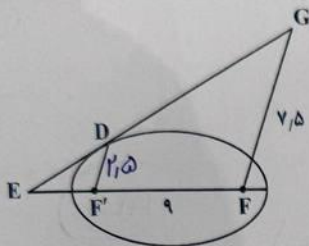
- 1 (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

تورک!

$$r = \frac{|1 - 4 - 7|}{\sqrt{14 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

۳۵. در مثلث EFG شکل زیر، ضلع EG در نقطه D بر بیضی مماس بوده و F و F' کانون‌های بیضی هستند.

اگر دو مثلث EF'D و EFG مشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ باشند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$2a = 10 \rightarrow a = 5$$

$$2c = 4 \rightarrow c = \frac{2}{2}$$

$$e = \frac{\frac{2}{2}}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\frac{9}{10} \quad (4)$$

$$\frac{1}{10} \quad (5)$$

600

۳۶. اگر $A = 0! + 1! + 2! + 3! + \dots + 600!$ باشد، باقیمانده تقسیم عدد $\frac{A+2!}{3!}$ بر عدد ۸، کدام است؟

$$6 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

$$A \equiv 1+1+2+4+12+\dots+4--!$$

$$A \equiv 10$$

$$10+2! \equiv 12$$

$$\frac{10+2!}{3!} \equiv 2$$

تدریس

۳۷. آزمون ورودی مؤسسه‌ای شامل ۲۵ سؤال زبان انگلیسی و ۲۰ سؤال ریاضی است و پاسخ کاملاً درست به هر سؤال زبان انگلیسی، ۷ امتیاز و هر سؤال ریاضی ۱۲ امتیاز دارد و پاسخ ناقص بدون امتیاز است. اگر آخرین داوطلب پذیرفته شده، ۲۹۷ امتیاز کسب کرده باشد، او در مجموع به چند سؤال پاسخ کاملاً درست داده است؟

$$7x + 12y = 297 \rightarrow 7x + 12y \equiv 297$$

$$5y \equiv 3 \rightarrow y \equiv 2 \rightarrow y = 7k + 2 \rightarrow x = -12k + 39$$

$$\begin{cases} x = -12k + 39 \leq 25 \\ y = 7k + 2 \leq 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12k \geq 14 \rightarrow k \geq 1 \\ 7k \leq 18 \rightarrow k \leq 2 \end{cases} \rightarrow k = 2$$

$$x = 15$$

$$y = 16$$

نت

۳۸. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۳، ۴ و ۶ می‌توان نوشت که بر ۶ بخش‌پذیر باشند؟

۳	۴	۴	۴
۶	۴	۴	۴

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad (4) \rightarrow (1)$$

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad (2) \rightarrow (1)$$

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad (2) \rightarrow (1)$$

$$2 \quad 2 \quad 4 \quad (2) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

$$4 \quad 4 \quad 2 \quad (2) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

$$+ (15)$$

نت

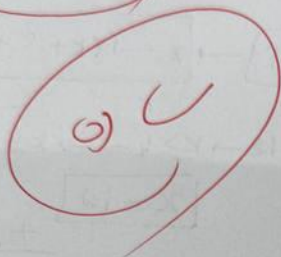
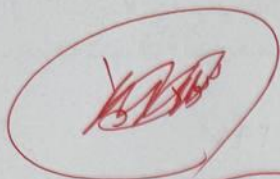
۳۹. بزرگترین عدد طبیعی n که دو مربع لائین متعامد از مرتبه n وجود ندارد، کدام است؟

۶ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)



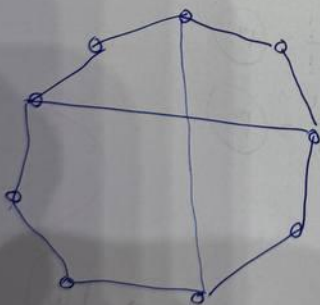
۴۰. گراف ۹ رأسی G ، فقط دارای دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است. تعداد دورهای به طول کدام عدد در گراف G ، بیشتر است؟

۹ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)



۳ دور به طول ۶

۲ دور به طول ۵

