



%

x



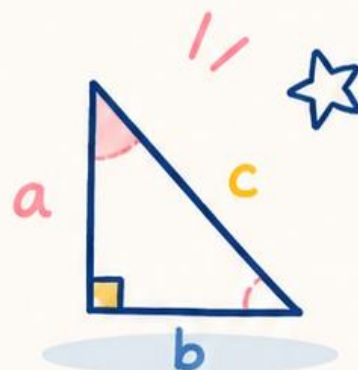
ماتریس و کاربردھا

$\sqrt{x}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

کنٹر، ۱۴۰۶

ہندسہ ۳





ماتریس:

آرایی از اعداد در یک جدول مستطیلی که شامل سطر ها و ستون هایی باشد یک ماتریس خوانده می شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مرتبه ها

$m \times n$

ستون

سطر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2×3

سطر

ستون

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 9 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3×3

مرتبه یک ماتریس:



هر ماتریسی که m سطر و n ستون داشته باشد، ماتریس از مرتبه $m \times n$ می نامند.

$$B \rightarrow \begin{cases} \text{سطر} \\ \text{ستون} \end{cases}$$

$$5 \times 7$$

درایه ماتریس:



هر کدام از اعداد واقع در ماتریس را درایه یا عنصر ماتریس می نامند و درایه ای که در سطر i و ستون j ماتریس قرار

دارد را با a_{ij} نشان می دهند. یعنی هر درایه دارای یک آدرس است که اولی نشان دهنده شماره سطر و دومی نشان

دهنده شماره ستون آن است.

$$a_{ij} = \text{درایه سطر } i \text{ و ستون } j \text{ ام}$$

$$a_{23} = \text{درایه سطر دوم ستون سوم}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

a_{11}

a_{22}

a_{33}

a_{21}

a_{31}

a_{12}

a_{23}

a_{32}

مثال ؟ به این ماتریس ها توجه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

a_{11} (row 1, col 1)
 a_{12} (row 1, col 2)
 a_{22} (row 2, col 2)
 a_{24} (row 2, col 4)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

a_{13} (row 1, col 3)
 a_{23} (row 2, col 3)
 a_{33} (row 3, col 3)

$$\begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

a_{11} (row 1, col 1)
 a_{12} (row 1, col 2)
 a_{21} (row 2, col 1)
 a_{22} (row 2, col 2)

مثال ؟ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۵)

درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس برابر ۸ است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -4 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

✓ a_{32}

$$a_{32}$$

مثال ؟ در ماتریس حاصل عبارت $2a_{12} + 3a_{31} - 4a_{22} + 6a_{21}$ را بدست آورید؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$9 + 9 - 14 + 9 = 13$$



انواع ماتریس:

۱. **ماتریس سطری:** ماتریسی را گویند که یک سطر و چند ستون دارد.

$$A_{1n} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \quad \begin{bmatrix} a & m & n \end{bmatrix}_{1 \times 3} \quad \begin{bmatrix} a & \pi & m & \pi \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

۲. **ماتریس ستونی:** ماتریسی را گویند که یک ستون و چند سطر دارد.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad \begin{bmatrix} a \\ m \\ n \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

۳. **ماتریس مربعی:** ماتریسی است که تعداد سطرها و ستونهایش برابر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

توجه ۱: درایه های a_{11} و a_{22} و a_{33} را درایه های قطر اصلی و درایه های a_{13} و a_{22} و a_{31} را درایه های قطر فرعی می گوئیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{Tr}(A) = 4$$

توجه ۲: درایه a_{22} را که هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است درایه مرکزی گوئیم که مختص ماتریس های مربع از مرتبه فرد است.

توجه ۳: در هر ماتریس مربعی، مجموع درایه های قطر اصلی را اثر ماتریس می نامند و اثر ماتریس A را با $\text{tr}(A)$ نشان می دهند.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{Tr}(B) = 19$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{Tr}(C) = 11$$

به سمت اصل ترچر بکن

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

۴. ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که درایه های غیر قطر اصلی

آن صفر است. (درایه های واقع بر قطر اصلی می توانند صفر باشند یا نباشند)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$$

۵. ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری درایه های قطر اصلی

همگی برابر باشند، ماتریس را اسکالر می نامند.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

افتا عددی دارد

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (تفاهم مرداد ۱۴۰۵)

ماتریس $A = [5]$ یک ماتریس اسکالر است.

انتقالی

۶. ماتریس واحد (ماتریس همانی): اگر در یک ماتریس اسکالر درایه های قطر اصلی همگی

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برابر عدد ۱ باشند، ماتریس را واحد می نامند و با I نشان می دهند.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۷. ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه های واقع در زیر

قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریسی بالا مثلثی گویند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸. ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه های واقع در

بالای قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریسی پایین مثلثی گویند.

تست: ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با شرط $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + j^2 & ; |i-j|=0 \\ 0 & ; |i-j|>0 \end{cases}$ چه نوع ماتریسی است؟

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- (۱) قطری و غیر اسکالر ✓
- (۲) اسکالر غیر همانی
- (۳) قطری و همانی
- (۴) همانی غیر اسکالر

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تست: چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- (الف) در ماتریس واحد درایه‌های قطر فرعی همگی صفر هستند. ✗
- (ب) در ماتریس قطری درایه‌های قطر اصلی غیر صفر هستند. ✗
- (ج) هر ماتریس قطری نوعی ماتریس اسکالر است ✗
- (د) هر ماتریس واحد نوعی ماتریس اسکالر است. ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ۱ (۱) ✓
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)



نمایش ماتریس با داشتن ضابطه:

بدانید که در بعضی موارد به جای نشان دادن درایه های ماتریس ضابطه ای برای تعیین درایه های آن ماتریس داده می شود که با توجه به آن ضابطه ماتریس را می نویسیم. به این ترتیب که ابتدا با توجه به مرتبه آدرس خام را مشخص می کنیم سپس رفتار خواسته شده با i و j را انجام می دهیم.

تست: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و i اول و $i+j$; j غیراول باشد، حاصل جمع درایه های سطر دوم A ، کدام

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{+} 12$$

است؟

۶ (۱)

۱۲ (۲) ✓

۱۵ (۳)

۱۰ (۴)

مثال: اگر $A_{3 \times 3}$ باشد، درایه های ماتریس $A = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$ را مشخص کنید.

فشار اوله
باشه اوله
بالای اوله

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{1-2+2} \xrightarrow{1-3+2} \xrightarrow{2-3+2} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

How

مثال: اگر $A_{3 \times 3}$ باشد، درایه های ماتریس $A = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ را مشخص کنید.

تست: مجموعه درایه‌های ماتریس $A = [\log_2(i \times j)]_{2 \times 2}$ چقدر است؟

مقداری نگاریم:

$$\log_b^a = k \leftrightarrow b^k = a$$

$$\log_2^4 = 2 \quad \log_2^8 = 3$$

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_2^4 & \log_2^8 \\ \log_2^{12} & \log_2^{16} \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌ها: $5 + \log_2^8 + 5 + \log_2^8 = 13$

جواب: ۱۳

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & a & 2 \\ 7 & c & 4 & b \\ 10 & 5 & 9 & a-2 \end{bmatrix}$ اگر درایه سطر اول و ستون سوم از درایه سطر دوم و ستون اول

$\sum_{j=1}^n a_{ij}$ جمع درایه‌ها

$\sum_{j=1}^4 a_{3j} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = 10 + 5 + 9 + 11 = 35$

جواب: ۳۵

تست: در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ که $i^2 = j^2$ اگر به ازای هر i و j دلخواه $a_{ji} = a_{ij}$ باشد، عدد a متعلق به کدام مجموعه است؟

$a_{11} = a_{11}$

$a_{21} = a_{12}$

$a_{22} = a_{22}$

مقداری مجموعه اعداد:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2a+2 & 2a+2 \\ 2a+2 & 2a+2 \end{bmatrix}$

$2a+2 = 2a+2$

$a = 0$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

تساوی دو ماتریس (هم مرتبه):



دو ماتریس برابرند اگر و فقط اگر درایه های نظیر در دو ماتریس با هم برابر باشند.

$$A_{mn} = B_{mn} \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

مثال: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & x+y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x-y \\ z+1 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار x ، y و z را بیابید. (نهایی مرداد ۱۴۰۵)

$$z+1 = -1 \rightarrow \boxed{z = -2}$$

$$\begin{cases} x-y = 5 \\ x+y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

تست: اگر ماتریس های $A = \begin{bmatrix} x-1 & 2y & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3-z \\ a & a & 2a \end{bmatrix}$ برابر باشند، باقیمانده تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر $4a + 1$ کدام است؟

$$\begin{cases} x-1 = 1 \rightarrow x = 2 \\ 4 = 2y \rightarrow y = 2 \\ 3-z = 2 \rightarrow z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{a=1}$$

تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر $4a + 1$ کدام است؟

(۱) ۳
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

$$17 = 4 + 4 + 4 + 5$$

$$17 \equiv 5 \pmod{4}$$

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} \log_m 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & n \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ برابر باشند، مجموع درایه‌های ماتریس A عددی است.

$$A = \begin{bmatrix} \log_2^4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & n \end{bmatrix} \rightarrow$$

- (۱) فقط مضرب ۴
(۲) هم مضرب ۳ و هم مضرب ۴
(۳) فقط مضرب ۳
(۴) نه مضرب ۳ نه مضرب ۴

جمع و تفریق دو ماتریس (هم مرتبه):

دو ماتریس قابل جمع و یا تفریق می باشند هرگاه هم مرتبه باشند و برای جمع و تفریق آنها های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع و تفریق می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 9 & 11 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس:

برای ضرب کردن یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تک تک درایه های ماتریس ضرب کنیم.

$$rA = r[a_{ij}] = [ra_{ij}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 12 & 15 & 3 \\ 6 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس:

① $A + B = B + A$

جابجایی

② $A + \bar{O} = A$

عضو خنثی

③ $A + (-A) = \bar{O}$

عضو قرینه

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

④ $A + (B + C) = (A + B) + C$

شرکت پذیری

⑤ $A + B = B + C \rightarrow A = C$

حذف پذیری

⑥ $r(A \pm B) = rA \pm rB$

⑦ $(r \pm s)A = rA \pm sA$

⑧ $rA = rB, r \neq 0 \rightarrow A = B$

⑨ $A = B \rightarrow rA = rB$

مثال:  اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ و ماتریس C به گونه ای باشد که $A - B + C$ برابر یک

ماتریس اسکالر با مجموع درایه های (-6) شود آنگاه ماتریس C را بدست آورید؟

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}}_{A-B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، آخرین رقم سمت راست $a^5 + b^5$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a + 2b) &= 4 \\ (4a - 2b) &= 4 \end{aligned}$$

$$3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

$$2 \cdot \frac{8}{3} - b = 3 \Rightarrow \frac{16}{3} - b = 3 \Rightarrow b = \frac{16}{3} - 3 = \frac{7}{3}$$

$$a^5 + b^5 = \left(\frac{8}{3}\right)^5 + \left(\frac{7}{3}\right)^5$$

آخرین رقم سمت راست $a^5 + b^5$ است.

۱ (۱)
 ۲ (۲) صفر
 ۳ (۳)
 ۴ (۴)

تست: اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2x & y \end{bmatrix}$ متعلق به مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ باشد، کوچک‌ترین

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$2A - \begin{bmatrix} 3 & x \\ 1-x & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{1}{2} \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$$

درایه $\begin{bmatrix} -7 & -\frac{1}{2} \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$

۱ (۱) صفر
 ۲ (۲) -۷
 ۳ (۳) -۱۰
 ۴ (۴) -۱۱

ضرب ماتریس ها: (نمترین قسمت ماتریس)



شرط آنکه بتوان ماتریس $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ را در هم ضرب کرد این است که:

باید تعداد ستونهای اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشد

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4} = (AB)_{2 \times 4} \quad B_{3 \times 4} \cdot C_{4 \times 1} = (BC)_{3 \times 1}$$

$$A_{5 \times 7} \cdot B_{7 \times 2} = (AB)_{5 \times 2} \quad A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = (AB)_{m \times p}$$

$$AB = (\text{ستون زام } B) \cdot (\text{سطر زام } A)$$

$\downarrow$
B

$\downarrow$
A

[]

مثال: ابتدا یک ماتریس سطری را در یک ماتریس ستونی ضرب می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 + 12 - 10 + 5 + 14 = 27$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 4 = \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 + 8 = \textcircled{10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + 8 - 1 + 0 = \textcircled{10}$$

مثال ? ضرب های زیر را انجام دهید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Labels: a_{11} (2), a_{12} (13), a_{21} (3), a_{22} (0)

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 19 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Labels: a_{11} (-2), a_{12} (19), a_{21} (0), a_{22} (4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 10 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Labels: a_{11} (3), a_{12} (0), a_{13} (1), a_{21} (-1), a_{22} (-2), a_{23} (7), a_{31} (10), a_{32} (-1), a_{33} (7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Labels: a_{11} (0), a_{12} (7), a_{13} (0), a_{21} (4), a_{22} (0), a_{23} (3), a_{31} (0), a_{32} (10), a_{33} (0)



چند ویژگی از ضرب ماتریس ها:

$$AB \neq BA \quad \text{در حالت کلی}$$

(۱) ضرب ماتریس ها در حالت کلی جابجایی ندارد.

$$(A \times B \times C) = (AB)C = A(BC) \quad (AB)C \quad A(BC) \quad \text{ضرب ماتریس ها شرکت پذیری دارد.}$$

$$(rA).(sB) = (rs)(AB)$$

(۳) اگر A و B دو ماتریس ضرب پذیر و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$$3A \times 2B = 4AB$$

$$\begin{cases} A(B \pm C) = AB \pm AC \\ (A \pm B)C = AC \pm BC \end{cases}$$

(۴) ضرب ماتریس ها روی عمل جمع (یا تفریق) توزیع پذیر است.

نتیجه ویژگی ۴: در ماتریس فاکتورگیری مجاز است ...

$$AB + AC = A(B + C) \quad \text{شرط ۱: عامل مشترک در جملات درست باشد یا راست باشد}$$

$$AB + CB = (A + C)B \quad \text{شرط ۲: جهت رعایت شود (عامل مشترک در همانستی به سمت چپ) (موجود)}$$

$$AB + CA \quad \times$$

(۵) خاصیت "حذف پذیری" در ضرب ماتریس ها (در حالت کلی) برقرار نیست.

$$AB = AC \not\rightarrow B = C$$

(۶) ممکن است ضرب دو ماتریس برابر ماتریس صفر شود ولی هیچ کدام ماتریس صفر نباشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس های تعویض پذیر:



دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B را تعویض پذیر می گوئیم، هرگاه $AB = BA$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

✓ هر دو ماتریس قطری هم مرتبه تعویض پذیرند.

✓ ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم مرتبه با خودش تعویض پذیر است.

$$IA = AI = A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

✓ هر ماتریس اسکالر، با هر ماتریس هم مرتبه با خودش تعویض پذیر است.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$xx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} xx$$

تست های جذاب از ضرب:



تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = AB$ $[C_{ij}]$ آنگاه C_{23} کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱۶

(۳) ۲۲

(۴) ۲۴

تست: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & m & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر عنصر واقع در سطر دوم و

ستون اول ماتریس AB برابر ۶ باشد، m کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱/۵

(۳) -۱/۵

(۴) -۲

مثال: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -1 & |i-j| > 1 \\ 0 & |i-j| = 1 \\ 1 & |i-j| < 1 \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2I$ را به دست

آورید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تست: اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $B - \frac{3}{2}A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) ۹
- (۴) -۹

تست: ماتریس‌های $A = [2i - j]_{2 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 3x \\ 2 & x & x-1 & 0 \\ -1 & 2x & 3 & x+2 \end{bmatrix}$ مفروض هستند. اگر درایه سطر دوم و ستون چهارم ماتریس $A \times B$ برابر ۱۲ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A \times B$ چقدر است؟ (نرینه دو ۱۴۰۴)

- (۱) ۵
- (۲) -۶
- (۳) -۴
- (۴) ۸

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه واقع بر سطر ۳ و ستون ۳ ماتریس

$A^2 + 2AB + A + 2B$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) -۸

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ باشند، مرتبه ماتریس C چند باشد تا حاصلضرب BCA

تعریف گردد؟

(۱) 3×2

(۲) 2×3

(۳) 2×2

(۴) 3×3

تست: اگر حاصل ضرب جواب های معادله $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ برابر ۵- باشد، مجموع

جواب های آن کدام است؟ (آزمون کانون)

مقداری معادله درجه ۲:

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) ۱

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ c & 5 & a \\ 1 & b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} c & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -1 & b \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی اسکالر باشد، مجموع درایه‌های

ماتریس AB کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) -۶
- (۳) ۹
- (۴) -۹

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ بزرگ‌ترین درایه روی قطر اصلی A^2 کدام

است؟

مقداری اتحاد:

- (۱) ۸
- (۲) ۶۴
- (۳) ۳۲
- (۴) ۱۶

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ باشد، به ازای کدام

مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

- (۱) -۴
- (۲) -۳
- (۳) ۵
- (۴) ۶

تست: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A ،

کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۷
- (۳) ۱۹
- (۴) ۲۱

تست: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ماتریس A

برابر ۴۷ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۱

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2 چند برابر مجموع درایه‌های A

است؟ (داخل ۱۴۰۳ - تیرماه)

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) -۳
- (۴) ۳

تاکتیک تستی:

تست:  اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & & & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر

اصلی C^2 کدام است؟ (داخل ۹۷)

- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۸
- (۳) ۲۰
- (۴) ۲۴

تست:  اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2x \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $AB = \vec{0}$ باشد، مجموع درایه‌های BA کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) ۵
- (۴) ۴

تست: به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟ (خارج ۹۸)

(۱) $x = 1, y = -7$

(۲) $x = 2, y = -7$

(۳) $x = 2, y = -5$

(۴) $x = 1, y = -5$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y \in \mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر

باشد، مقدار xy کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

(۱) -1

(۲) -2

(۳) 1

(۴) 2

اتحاد در ماتریس و ماجراهایش:



توجه مهم: 🧐

تست: برای دو ماتریس A و B ، اگر $A - B = [i - j]_{2 \times 2}$ و $AB + BA = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مجموع

درایه‌های ماتریس $A^2 + B^2$ کدام است؟ (آزمون کانون)

(۱) ۴۸

(۲) ۳۶

(۳) ۲۴

(۴) ۱۸

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $I + (A - I)(A^2 + A + I)$ را بیابید؟

تذکره: 🤔

تست: اگر حاصل جمع درایه‌های $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \log 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \log 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \log 8 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \log 256 & 1 \end{bmatrix}$ به صورت

$\log(2^a \times 10^b)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۵۱۲

(۲) ۳۸

(۳) ۵۱۰

(۴) ۳۶

توان در ماتریس:



- ✓ $A^0 = I$
- ✓ $A^1 = A$
- ✓ $A^2 = A.A$
- ✓ $A^3 = A.A^2$ یا $A^2.A$
- ✓ $A^4 = A.A^3$ یا $A^3.A$ یا $A^2.A^2$
- ✓ $A^m.A^n = A^n.A^m = A^{m+n}$
- ✓ $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

بطور کلی ➡

تست: ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 2 & : i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس

$4A - A^2$ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۸ (۳)

۲۱ (۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

$3x$ (۱)

$3y$ (۲)

$2(x^2 + y^2)$ (۳)

$3(x^2 + y^2)$ (۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 9 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^3 کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

توان n ام یک ماتریس قطری:



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

محاسبه توان‌های بزرگ در ماتریس:



← به الگو می‌رسیم

← به الگو نمی‌رسیم

اول توان ۲



اگر در توان دوم ...

۱) اگر توان دوم یک ماتریس برابر I شود توان‌های زوج آن ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن ماتریس برابر خود ماتریس می‌باشد.

۲) اگر توان دوم یک ماتریس، ماتریس صفر شود به آن ماتریس پوچ توان گویند و در این حالت سایر توان‌های ماتریس نیز صفر است.

۳) اگر توان دوم یک ماتریس برابر خود ماتریس شود به آن ماتریس خودتوان گویند و در این حالت سایر توان‌های ماتریس نیز برابر خود ماتریس است.

۴) اگر توان دوم یک ماتریس ضربی از آن ماتریس شود برای توان‌های بالاتر الگوی زیر برقرار است.



آن‌هایی که با توان دوم به الگو می‌رسیم:

تست: اگر $BA^n = \begin{bmatrix} 32 & 32 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد n کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) ۶

مثال: با در نظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^7 را بیابید. (نهایی مرداد ۱۴۰۵)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{1!} + 2A^{2!} + 3A^{3!} + \dots + 10A^{10!}$ کدام است؟

(۱) $5A + 5I$ (۲) $A + 15I$ (۳) $A + 54I$ (۴) $55A$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^{2022} - 7A^{1401}$ کدام است؟

(۱) ۲۸

(۲) -۲۸

(۳) ۴۸

(۴) -۴۸

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) ۵۴
(۲) ۲۴
(۳) ۲۱۶
(۴) ۷۲

تست: ماتریس ستونی B از مرتبه ۳ با درایه های یک و $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ به $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{bmatrix}$ به طوری که $AB = 1$ باشد را در نظر بگیرید. اگر $C = \begin{bmatrix} \tan 2\theta & 1 \\ 0 & -\tan 2\theta \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های C^{1403} چقدر

است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) صفر

مقداری مثلثات:

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^{1400} کدام مورد است؟ (آزمون سنجش)

- (۱) A
(۲) I
(۳) $2^{700}A$
(۴) $2^{700}I$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = ABA$ ، ماتریس C^{20} کدام است؟

(۱) A

(۲) B

(۳) I

(۴) $\bar{O}$

آن‌هایی که با توان دوم به الگو نمی‌رسیم:

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1381} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است؟

(۱) ۱۳۸۱

(۲) ۱۳۸۲

(۳) ۱۳۸۳

(۴) ۱۳۸۴

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a-b$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۶

(۳) ۱

(۴) ۳۶

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{100} مجموع درایه‌ها کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) ۲

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B = A^{999} + A^{1000} + A^{1001}$ کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) ۲
- (۴) -۲

تکنیک تستی: قضیه کیلی - همیلتون:

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد همواره داریم:

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، دو تایی (α, β) کدام است؟

- (۱) (۲, ۱۱)
- (۲) (۲, ۱۳)
- (۳) (۴, ۱۱)
- (۴) (۴, ۳)

تست: اگر A یک ماتریس مربعی و $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 6A - 11I$ باشد آنگاه ماتریس A کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ 6 & x \end{bmatrix}$ و $A^2 = A$ باشد $a + x$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) صفر

(۴) -۴

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $A(A + \alpha I) = \beta I$ باشد، $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) -۱۴

(۲) ۵

(۳) -۱۷

(۴) -۵

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $A^4 = mA + nI$ باشد، آنگاه حاصل $m - n$ کدام است؟

(۱) -۱۱

(۲) -۲۹

(۳) ۲۹

(۴) ۱۱

دترمینان



اگر A یک ماتریس مربعی باشد دترمینان A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهیم و یک عدد حقیقی است که به ماتریس A نسبت داده می‌شود.

💡 دترمینان ماتریس‌های مربعی 1×1 و 2×2 :

$$1) \quad A = [k]_{1 \times 1} \rightarrow |A| = k$$

$$A = [-7] \rightarrow |A| = -7$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (2 \times 7) - (3 \times 5) = -1$$

⚠ دو تا خط در ریاضی:

تست: در کدام ماتریس اگر به همه درایه‌ها مقداری مخالف صفر و یکسان اضافه کنیم، دترمینان تغییر

نمی‌کند؟

$$\begin{aligned} (1) & \begin{bmatrix} 11 & 23 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 29 & 22 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} -19 & 14 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} \log_6^3 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B ، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۲)

$$\begin{aligned} (1) & \frac{9}{4} \\ (2) & \frac{15}{4} \\ (3) & \frac{9}{8} \\ (4) & \frac{15}{8} \end{aligned}$$

تست: اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} -3 & -24 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$ و $B - A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB + BA|$ 

کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۵)

(۱) -۱۹۳

(۲) -۱۱۷

(۳) ۱۹۳

(۴) ۱۱۷

دترمینان ماتریس های 3×3 :



قبل از آموزش نحوه محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 شما را با دو تعریف آشنا می کنم.

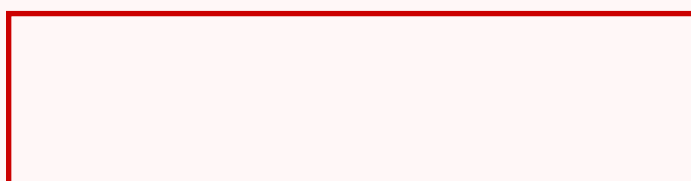
کهاد (مینور):

اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد در این صورت i ژ امین کهاد ماتریس A را با M_{ij} نشان می دهیم و ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بدست می آید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

همسازه (کوفاکتور):

اگر $A[a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد در این صورت i ژ امین همسازه A را با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.



مثال: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ مطلوبست؟

$$A_{11} =$$

$$A_{21} =$$

$$A_{33} =$$

$$A_{23} =$$

روش محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 :



برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 می توانیم نسبت به هر سطر یا هر ستون دلخواه (هیچ فرقی در جواب ندارد) بسط داده دترمینان را محاسبه کنیم بدین ترتیب که ابتدا سطر یا ستون مورد نظر برای بسط را انتخاب می کنیم سپس هر درایه را در همسازهاش ضرب کرده و حاصل هر قسمت را بدست آورده و با هم جمع می کنیم عدد نهایی دترمینان ماتریس 3×3 است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال: دترمینان مقابل را با بسط حول سطر اول حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون دوم محاسبه نمایید. (نهایی مرداد ۱۴۰۵)

مثال: دترمینان های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

تست: در معادله دترمینانی $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ، تفاضل جواب ها برابر کدام است؟ (ستجش ۱۴۰۵)

- (۱) ۵
- (۲) ۴/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۲/۵

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 3 & 2|A| & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام می‌تواند

باشد؟ (آزمون گزیننده دو)

۲ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & a & 3 \end{bmatrix}$ و $|A| = 6$ ، آنگاه با افزودن عدد a به همه درایه‌های ستون سوم ماتریس

A ، دترمینان ماتریس جدید چند برابر دترمینان A می‌شود؟ (سنجش ۱۴۰۵)

۲ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۱۰ (۴)

تست: به ازای کدام مقدار k ، مجموع ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ x & x+2 & 4 \\ x-1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ برابر صفر است؟

صفر (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

نتیجه ۱: 🤔

نتیجه ۲: 🤔

تست: اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$ برابر ۶ باشد، کدام a کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۳

تست: اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}$ برابر ۸ باشد، x برابر است با:

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) ± 3
- (۴) ± 1

تست: معادله $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) بی شمار
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

مثال: حاصل دترمینان های زیر را بیابید.

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & \circ & \circ \\ d & b & \circ \\ e & f & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{vmatrix} =$$

نتیجه مهم: 🤔

تست: اگر هر یک از درایه های یک ماتریس قطری 3×3 را در شماره سطر و ستون آن ضرب کنیم آنگاه دترمینان ماتریس حاصل چند برابر دترمینان ماتریس اولیه است؟

(۱) ۸

(۲) ۲۷

(۳) ۳۶

(۴) ۶۴

روش ساروس (فقط برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3):



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & r \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

afh bdr ceg aer bfg cdh

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

$$(aer + bfg + cdh) - (afh + dbr + ceg)$$

مثال: دترمینان های مقابل را با روش ساروس بدست آورید؟ 

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

مثال: دترمینان مقابل را با روش ساروس بدست آورید؟ 

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ویژگی های دترمینان:



ویژگی اول: اگر یک سطر یا یک ستون از دترمینانی در یک عدد حقیقی ضرب شود، همانند آن است که حاصل آن دترمینان در آن عدد حقیقی ضرب شده است.

نتیجه: 

تست: اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ ، حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & -3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟ 

(۱) -۱۲

(۲) ۶

(۳) -۶

(۴) ۱۲

تست: اگر $P = [a_{ij}]$ یک ماتریس سه در سه و $Q = [b_{ij}]$ نیز ماتریسی سه در سه به طوری که $b_{ij} = 2^{i+j} a_{ij}$ ($i \geq 1, j \leq 3$) و $|P| = 2$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس Q کدام است؟

(۱) 2^{10}

(۲) 2^{11}

(۳) 2^{12}

(۴) 2^{13}

نتیجه ۲: 🤔

مثال: ?

$$5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

نتیجه ۳: 🤔

تست: اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A \cdot |A|$ ، کدام است؟ (داخل ۹۸)

(۱) ۶۴

(۲) ۹۶

(۳) ۱۲۸

(۴) ۲۵۶

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix}$ و A^2 ماتریس اسکالر غیر صفر و $B = \begin{bmatrix} 2y & x^2 - 2 \\ 2z & z \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه دترمینان

ماتریس $-2B$ کدام است؟ (مدارس برتر تهران)

(۱) -۲

(۲) -۴

(۳) -۸

(۴) -۱۰

تست: اگر A و B ماتریس های وارون پذیر و λ یک عدد حقیقی باشد کدام گزینه در مورد دترمینان آنها

نادرست است؟ (داخل ۹)

(۱) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(۲) $|AB| = |BA|$

(۳) $|\lambda A| = \lambda |A|$

(۴) $|AB^{-1}| = |A| |B^{-1}|$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ 2 \sin 15^\circ & 2 \cos 15^\circ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل

$|B| |B| + \sqrt{3} |A| |A| + 16$ کدام است؟

(۱) ۱۱۰

(۲) ۱۱۳

(۳) ۱۱۴

(۴) ۱۲۵

تست: A ماتریسی قطری از مرتبه ۳ است که درایه های آن همگی عدد صحیح بوده و داریم:

$\|A\| = 4A + A$ اگر $|A| \neq 0$ ، آنگاه مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس A ، کدام نمی تواند باشد؟

(۱) -۱

(۲) -۵

(۳) ۳

(۴) ۷

ویژگی دوم: اگر جای دو سطر یا دو ستون از دترمینانی عوض شود، مقدار دترمینان قرینه می گردد.

مثال: حاصل دترمینان های زیر را بیابید.

الف)
$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{vmatrix} =$$

ب)
$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & 3 & \circ & \circ \\ 4 & \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} =$$

مثال: در یک ماتریس همه اعضاء بجز قطر فرعی صفر است. اگر اعضای قطر فرعی برابر $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشند، دترمینان این ماتریس را به دست آورید.

$$\begin{vmatrix} & & & & a_1 \\ & & & a_2 & \\ & & a_3 & & \\ & a_4 & & & \\ a_5 & & & & \\ a_6 & & & & \\ a_7 & & & & \end{vmatrix}$$

مثال: حاصل
$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & a_1 \\ \circ & \circ & \circ & a_2 & \circ \\ \circ & \circ & a_3 & \circ & \circ \\ \circ & a_4 & \circ & \circ & \circ \\ a_5 & \circ & \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & a_2 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a_3 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & a_4 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & a_5 \end{vmatrix}$$
 را به دست آورید.

ویژگی سوم: اگر دو سطر یا دو ستون از دترمینانی یکسان باشند، حاصل آن دترمینان صفر است. 💡

مثال: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ را به دست آورید؟ ❓

نتیجه: 🤔

تست: معادله $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 \\ 1 & -2x & 1 \\ 1 & -4x & 2 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟ ❓

(۱) ۳

(۲) بی شمار

(۳) ۱

(۴) صفر

ویژگی چهارم: در هر دترمینان همواره می توان مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه یا کم کرد بدون آنکه مقدار دترمینان تغییر کند. 💡

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-C_2 + C_1 \rightarrow C_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

تست: اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{3 \times 3}$ کدام است؟ ❓

(۱) صفر

(۲) $ab(a + b)$

(۳) $a.b$

(۴) $a + b$

ویژگی پنجم: (خاصیت ضربی دترمینان) اگر A و B دو ماتریس مربعی هر مرتبه باشند
 آنگاه: $|AB| = |A||B|$ پس نتیجه می شود $\leftarrow$

تست: اگر A و B دو ماتریس 2×2 و $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $BA = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) ۲
 (۴) -۲

تست: اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [a_{ji}]_{2 \times 2}$ دو ماتریس وارون پذیر باشند، ماتریس AB کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
 (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
 (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

تست: برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، اگر $|A^2 + kA - A| = 125$ باشد، دترمینان $(k+1)I_3$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (داخل ۱۴۰۴ - اردیبهشت)

- (۱) ۶۴
 (۲) ۸
 (۳) -۸
 (۴) -۶۴

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D = BA^3B$ کدام

است؟ (داخل ۱۴۰۴-تیرماه)

- (۱) ۸
- (۲) $\frac{8}{3}$
- (۳) -۸
- (۴) $-\frac{8}{3}$

تست: برای ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$

باشد، $|D|$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۴-تیرماه)

- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) صفر

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $|A^3|$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۸
- (۳) ۱
- (۴) -۸

مثال: اگر $A = [1, 2, -3]$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ مطلوبست حاصل $|BA|$ ؟ (تدریس کتاب درسی)

بدانید که 🤔

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -1 & \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ و $|AB| = 0$ باشد، مقدار m چقدر است؟

- (۱) $m \in \mathbb{R}$
- (۲) فقط $m = 0$
- (۳) فقط $m = 1$
- (۴) $\{0, 1\}$

ویژگی ششم: (خاصیت تفکیک) در هر دترمینان همواره می توان به دو سطر (یا ستون) دست نزد و سطر یا ستون دیگر را متناسب با مسئله تفکیک کرد.

مثال:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

تست: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1+a & 2+b & k \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ دارای دترمینان برابر صفر باشند، آنگاه:

(۱) $a - b = 0$

(۲) $a + 5b = 0$

(۳) $5a + b = 0$

(۴) $a + b = 0$

تست: حاصل $\begin{vmatrix} a & b-c & d-e \\ b & c & 0 \\ -b & c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & c-b & e-d \\ -b & -c & 0 \\ b & -c & -2d \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $6adc$

(۲) $-6adc$

(۳) صفر

(۴) $-4acd$

تست: در دترمینان روبرو اگر درایه سطر دوم و ستون سوم را ۲ واحد کم کنیم دترمینان چه تغییری می کند؟

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & m & x \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(۱) ۱۰ واحد کم می شود.

(۲) ۱۰ واحد اضافه می شود.

(۳) ۵ واحد کم می شود.

(۴) ۵ واحد اضافه می شود.

تست: در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم چهار واحد اضافه کنیم،

مقدار دترمینان تغییر نخواهد کرد، a کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

تست: به هر درایه سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد

بیشتر گردد؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲



در دترمینان های پارامتری اینگونه عمل کنید:

اگر بخواهیم حاصل یک دترمینان با درایه های پارامتری را در تست تشخیص دهیم بهترین راه عدد دادن به پارامترهاست. فقط در عددگذاری باید دقت کرد که به ازای اعداد انتخاب شده گزینه ها متفاوت باشند یعنی در هنگام انتخاب اعداد باید نگاه ما به سمت گزینه ها باشد.

🤔 **توجه اول:** در دترمینان اگر چندین پارامتر در مسأله بود می توان همه را یکسان فرض کرد و یک عدد به آن ها داد مگر آنکه شرایط مسأله اجازه ندهد.

🤔 **توجه دوم:** در دترمینان ها صفر اهمیت خاصی دارد. تا جای ممکن به پارامترها صفر می دهیم مگر آنکه گزینه ها اجازه ندهد.

❓ **تست:** مقدار دترمینان

$b+c$	$a+c$	$a+b$
a	b	c
2	2	2

کدام است؟

(۱) $a+b+c$

(۲) 0

(۳) 2

(۴) $2(a+b+c)$

❓ **تست:** اگر $a+b+c = -5$ حاصل دترمینان

a	b	$c+2$
a	$b+2$	c
$a+2$	b	c

کدام است؟

(۱) -12

(۲) -4

(۳) 4

(۴) 12

تست: اگر $a+b+c=5$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 4+a & b & c \\ a & 4+b & c \\ a & b & 4+c \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۲۴

(۳) ۱۳۵

(۴) ۱۴۴

تست: در ماتریس $A = \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{vmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه ها برابر ۶ و مقدار $|A|=8$ باشد، x کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ± 1

(۳) ± 2

(۴) ± 3

تست: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ با شرط $y = x+z$ کدام است؟

(۱) $2x(x+z)$

(۲) $x(x+z)$

(۳) $x^2(x+z)$

(۴) $2x^2(x+z)$



نمایش معادله خط توسط دترمینان

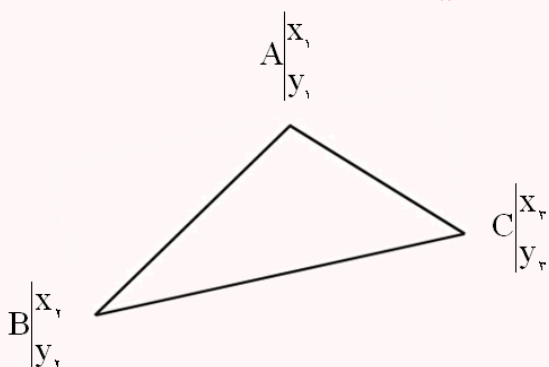
معادله خطی که از دو نقطه $A(a,b)$ و $B(c,d)$ می‌گذرد به صورت روبرو است.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: معادله خط گذرا از دو نقطه $A \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ را بیابید؟

مثال: شیب خط Δ به معادله $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

نمایش مساحت یک مثلث توسط دترمینان



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

تست: مثلثی به رئوس $A(-1,0)$ ، $B(2,4)$ و $C(0,-1)$ مفروض است. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB برابر است با:

- (۱) ۱
- (۲) ۱/۴
- (۳) ۲/۸
- (۴) ۳/۲



وارون یک ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و ماتریسی مانند B هم مرتبه با A وجود داشته باشد به طوریکه $AB = BA = I$ آنگاه B را وارون ماتریس A می نامیم و با A^{-1} نشان می دهیم.

بنابراین:



روش کلی یافتن وارون در عبارت

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^3 - 5A^2 + A + 3I = \bar{0}$ آنگاه وارون A را بیابید.

تست: اگر $A^2 + 5A - 6I = \bar{0}$ باشد، وارون ماتریس $(A + 4I)$ کدام است؟

$$\frac{1}{10}(A + I) \quad (1)$$

$$\frac{1}{10}(A - I) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{10}(A - I) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{10}(A + I) \quad (4)$$

تست: اگر $A \neq \bar{O}$ و $A^2 = A$ و وارون ماتریس $I + 3A$ به صورت ماتریس $I + KA$ باشد، K کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{2}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{2}{4}$

تست: اگر وارون ماتریس A با خودش برابر باشد، وارون ماتریس $2I - A$ کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱) $2I - A$

(۲) $\frac{1}{2}I - A$

(۳) $I + A$

(۴) $\frac{2}{3}I + \frac{A}{3}$

تست: اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوریکه $A^2 \neq \bar{O}$ و $A^3 = \bar{O}$ آنگاه معکوس ماتریس $I - A$ به کدام صورت است؟

(۱) $A^2 - A$

(۲) $A^2 + A + I$

(۳) $A^2 - A + I$

(۴) $A^2 + A$

تست: اگر دو ماتریس A و $(I - A)$ وارون هم باشند. ماتریس A^{-1} برابر کدام است؟ (داخل ۹۵)

(۱) A

(۲) $-A$

(۳) I

(۴) $-I$

تست: اگر A ماتریسی مربعی باشد به طوری که $A^2 = I$ و وارون ماتریس $2A - I$ ، ماتریس $\alpha A + \beta I$ باشد،

آن گاه حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟ (آزمون کانون)

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{2}{9}$

تست: اگر A یک ماتریس مربعی غیر صفر و $A^2 = \bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $I + 2A$ کدام است؟ (آزمون کانون)

با توجه به گزینه‌ها وارون به شکل $I + \alpha A$ می‌باشد.

$$(I + 2A)(I + \alpha A) = I$$

$$I + \alpha A + 2A + 2\alpha A^2 = I$$

$$\rightarrow \alpha A + 2A = \bar{O} \rightarrow (\alpha + 2)A = \bar{O} \rightarrow \alpha = -2$$

وارون: $I - 2A$

(۱) $I + \frac{1}{2}A$

(۲) $I - \frac{1}{2}A$

(۳) $I - 2A$

(۴) $I - A$



چند نکته و ویژگی مهم از وارون:

① وارون یک ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است. (قضیه یکتایی وارون)

اثبات: فرض کنیم ماتریس های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می کنیم $B = C$ 🤔

طبق فرض $AB = BA = I$

طبق فرض $AC = CA = I$

$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = I$

② اگر دو ماتریس تعویض پذیر و وارون پذیر باشند آنگاه وارون های آنها نیز تعویض پذیرند.

③ اگر A و B ، ماتریس های مربعی وارون پذیر و هم مرتبه باشند و K عددی حقیقی مخالف صفر باشد آنگاه:



شرط وارون پذیری

اثبات: 🤔

دترمینان $\rightarrow A \cdot A^{-1} = I$ وجود دارد $\rightarrow A^{-1}$ وارون پذیر است $|A \cdot A^{-1}| = 1$

خاصیت ضربی $\rightarrow |A| |A^{-1}| = 1 \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^{-1}| \neq 0 \end{cases}$

نتیجه مهم: 🤔

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a-1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد و $B = \begin{bmatrix} a & a+2 & a+3 \\ a+1 & 2a & a+4 \\ a+1 & a+1 & 3a \end{bmatrix}$ در این صورت دترمینان

$-B^{-2}$ کدام است؟ (مدارس برتر تهران)

(۱) $-\frac{1}{216}$

(۲) $-\frac{1}{36}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $-\frac{1}{6}$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2m-1 & n-1 \\ k+2 & 3 \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر و $b_{ij} = \begin{cases} m-j & i < j \\ n+i & i = j \\ k & i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ باشد، حاصل

دترمینان ماتریس $(-2 | B^{-1} | B^2)$ کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱) $-۰/۶$

(۲) $۰/۶$

(۳) $۰/۸$

(۴) $-۰/۸$

تست: اگر $A = B + 2I_3$ و $A^2 - AB - BA + B^2 = D$ باشد، حاصل جمع درایه‌های $((D^{-1})^5)^{-1}$ کدام

است؟

(۱) 2^{10}

(۲) 2^{11}

(۳) 2^{12}

(۴) 2^{13}

تست: $\begin{vmatrix} 2 & m & p \\ 0 & 3 & k \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k + 3$ و k عدد صحیح نمی باشد. در این صورت با فرض وارون پذیری A ، مجموع

درایه های ماتریس $A_{2 \times 2}$ که در معادله $-2kA^2 = 3A$ صدق می کند، کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۵)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۶

تست: ماتریس A به گونه ای است که $A^{-1} + A = 4I$. اگر $A^4 = mA + nI$ ، آنگاه دوتایی مرتب (m, n)

کدام است؟

(۱) $(60, -17)$

(۲) $(56, -17)$

(۳) $(60, -15)$

(۴) $(56, -15)$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & |A| \\ |A|+7 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه به ازای مقدار بزرگتر $|A|$ ، دترمینان

ماتریس $B |A^{-1}|$ برابر با کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۵)

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) $-2/5$

(۴) $2/5$

تست: اگر $C = AB$ ، $B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}$ و $3|C^{-1}|^2 - 2|C^{-1}| - 1 = 0$ برقرار باشد، کمترین مقدار m چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $-\frac{4}{3}$
(۳) -4
(۴) صفر

تذکر: 🤔

تست: اگر $ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس AB^10A^{-1} چقدر است؟

- (۱) ۱۰۲۴
(۲) ۴۰۹۶
(۳) ۲۰۴۸
(۴) ۵۱۲

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ و B ماتریس وارون پذیر هم مرتبه با A باشد، مجموع

درآیه های ماتریس $(BAB^{-1})^{1402}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) صفر
- (۳) -۲
- (۴) ۱

وارون ماتریس های 2×2



اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $\Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه های غیر قطر اصلی $(A^{-1} + B)^{-1}$

کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$
- (۲) $\frac{5}{2}$
- (۳) $\frac{9}{4}$
- (۴) $-\frac{9}{4}$

تست: اگر $3A^{-1} = \begin{bmatrix} |A| & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $|A| > 0$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟

- (۱) -۱۲
- (۲) -۶
- (۳) ۶
- (۴) ۱۲

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -2 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(I + A)^{-1}A$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) -۲

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی، α و β دو عدد حقیقی باشند، به طوری که

$$\alpha A + \beta I = A^{-1}$$

- (۱) $-\frac{3}{5}$
- (۲) $-\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{4}{5}$

تست: ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$.

مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

(۱) -۴

(۲) ۴

(۳) -۲

(۴) ۲



پیدا کردن یک ماتریس از ضرب چند ماتریس (حذف عامل مزاحم):

مزاحم ها باید حذف بشن

تست: اگر ماتریس های A و $I + A$ وارون هم باشند، از رابطه $AX = A^2 + A$ ، ماتریس X کدام است؟

(۱) $A + 2I$

(۲) $A - I$

(۳) A^{-1}

(۴) $A^{-1} - I$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، از رابطه $AX = 2I$ ماتریس X کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۵)

- (۱) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
 (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
 (۳) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

تست: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریس X کدام است؟ (داخل ۹۹)

- (۱) $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
 (۲) $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
 (۳) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

تست: اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون پذیر از مرتبه ۳ بوده و $3A - 2AB = 3B$ باشد، دترمینان

ماتریس $A^{-1} - B^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{27}$
 (۲) $-\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) $\frac{8}{27}$

تست: در $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی

ماتریس $2A - 3B^{-1}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳- تیرماه)

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۴

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه در تساوی ماتریسی $B = \begin{bmatrix} \sqrt{|A|} & 0 \\ -1 & -\sqrt{|A|} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{|A|}{5} & 1 \\ \sqrt{|A|} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

بزرگ‌ترین درایه ماتریس B کدام است؟

- (۱) $-\frac{25}{4}$
- (۲) $-\frac{15}{2}$
- (۳) $\frac{25}{4}$
- (۴) $\frac{15}{2}$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ صدق $\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix}$

کند، کوچک ترین درایه قطر اصلی ماتریس X کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

(۱) -۱۵

(۲) -۳

(۳) ۶

(۴) ۸

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $XA^{-1} = 2I + A^{-1}$ و B ماتریسی اسکالر باشد که مجموع درایه های آن

برابر ۲- باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون اول $X^{-1}B$ کدام است؟ (مدارس پرتقیران)

(۱) -۶

(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) ۶



دستگاه دو معادله و دو مجهول و حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون:

دستگاه دو معادله دو مجهول یعنی

جواب دستگاه یعنی

پس دستگاه جواب ندارد (فاقد جواب) است، یعنی

پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد، یعنی

پس دستگاه ۱ جواب منحصر به فرد دارد، یعنی

به دستگاه دو معادله دو مجهول
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 توجه کنید.

سه ماتریس تعریف می‌کنیم:

$A =$ ماتریس ضرایب

$B =$ ماتریس مقادیر معلوم

$X =$ ماتریس مجهولات

حالا با توجه به دستگاه داریم ←

و باز هم حذف مزاحم 😡

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۵)

تست: اگر وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} 4x + my = 7 \\ nx + 3y = 4 \end{cases}$ به صورت $\begin{bmatrix} P & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع جواب های

دستگاه کدام است؟ (آزمون گزیننده دو)

- (۱) ۱۴ -
- (۲) ۱۲
- (۳) ۲۳ -
- (۴) ۹

تست: وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = 11 \end{cases}$ برابر $\begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 3$ باشد، مقدار y

کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

تست: اگر ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$ برابر $(I - A)^{-1}$ و ماتریس B به صورت زیر باشد،

$$B = \begin{bmatrix} |A| & -1 & -|A^{-1}| \\ 0 & 2 & 0 \\ 36 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $2B^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) $\frac{1}{4}$

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ a'x + b'y = 3 \end{cases}$ باشد،

حاصل $bx + ay$ کدام است؟ ($|A| > 0$) (قلمچی ۱۴۰۵)

(۱) $-4/5$

(۲) -5

(۳) $-5/5$

(۴) -6

تست: جواب دستگاه $\begin{cases} ax + by = 2 \\ bx + ay = 6 \end{cases}$ ماتریس X_1 و جواب دستگاه $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$ ماتریس X_2 است. اگر

$X_1 - X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۳

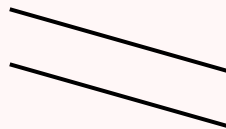
(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) ۲



نگاه هندسی به دو معادله و دو مجهول: (بحث در تعداد جواب‌های دستگاه)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



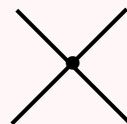
الف) موازی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



ب) منطبق

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



ج) متقاطع

تست: به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات

$$\begin{cases} -4x + (m-3)y = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$$

یک جواب منحصر به فرد

دارد. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تست: به ازای چند مقدار m دستگاه معادلات زیر جواب ندارد؟ 

$$\begin{cases} (m+1)x + (2m-1)y = 3m+2 \\ (-m+1)x + (-5m-1)y = -4m+2 \end{cases}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) صفر

(۴) بی شمار

تست: اگر m و n دو عدد حقیقی باشند به طوری که دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + 2y = -2n - 1 \\ 3x + (m+5)y = n + 4 \end{cases}$ بی شمار

جواب داشته باشد، چند زوج مرتب (m, n) وجود دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

تست: به ازای کدام مجموع مقادیر k ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (k+3)x + 3y = 9 \\ 4x + (k-1)y = 6 \end{cases}$ فاقد جواب است؟ 

(۱) $\{3\}$ (۲) $\{-5\}$ (۳) $\{-5, -2\}$ (۴) $\{4, -2\}$

تست: اگر m عددی باشد که به ازای آن دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + 3y = -4 \\ 2x + my = 4 + y \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد،

آنگاه حاصل جمع تمام مقادیر ممکن برای $|A|$ در ماتریس $A^3 = \begin{bmatrix} |A| & |A| \\ 4m & 2|A| \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۶

(۴) ۸

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-4 & -2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، دستگاه $\begin{cases} (a+3)x + (a+1)y = 4 \\ (2a+1)x + (3a-3)y = a \end{cases}$ چند جواب

دارد؟

(۱) بی‌شمار

(۲) یک جواب صفر

(۳) یک جواب غیر صفر

(۴) فاقد جواب

تست: اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-1)x + (m+3)y = 5 \\ (m+2)x + (m^2-2)y = m+6 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد و ماتریس

ضرایب این دستگاه را A بنامیم، آنگاه دترمینان ماتریس $A + I$ کدام است؟ (ازمون کانون)

(۱) ۱۸

(۲) ۱۶

(۳) ۱۴

(۴) ۱۲

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 2 \\ m+1 & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، کدام یک از دستگاه‌های زیر فاقد جواب است؟

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 7 \\ 5x + my = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x + (m+1)y = 4 \\ mx + 3y = 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ 4x + my = 5 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (m+1)x + y = 1 \\ 6x + 2y = m \end{cases} \quad (4)$$

دستگاه همگن:



دستگاه $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ که در آن مقادیر معلوم صفر است را دستگاه همگن می‌نامند. یک جواب بدیهی این دستگاه $x = 0$ و $y = 0$ است. در نتیجه این دستگاه هیچ وقت نمی‌تواند فاقد جواب باشد. پس این دستگاه یا یک جواب بدیهی (صفر) دارد یا بی‌شمار جواب (غیر صفر) دارد.

تست: اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ mx - 3y = 0 \end{cases}$ دارای جواب‌های غیر صفر باشد m کدام است؟

۶ (۱)

-۶ (۲)

۴ (۳)

-۴ (۴)

تست: اگر $(m, m^2 + 2)$ یک جواب دستگاه $AX = \bar{O}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دستگاه $AX = B$ دارای جواب منحصر به فرد نیست.

$$AB = AC \Rightarrow B = C \quad (2)$$

$$|A| \neq 0 \quad (3)$$

$$A^2 = A \Rightarrow A = I \quad (4)$$