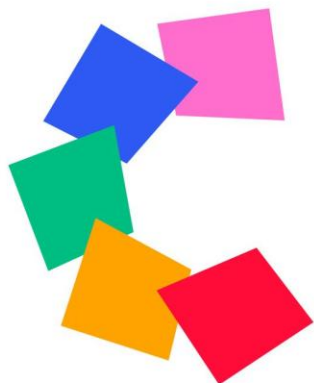




classino

هندسه ۳

محمد صحت کار

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۶

فصل اول

ماتریسی و کاربرد ها

درس اول

ماتریسی و اعمال روی ماتریسی ها

تعریف

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون

یک **ماتریس** نامیده می شود.

به عبارت دیگر: ماتریس جدولی است که از تعدادی سطر و تعدادی ستون

تشکیل شده است و در محل تلاقی هر سطر و هر ستون

یک عدد حقیقی قرار دارد. به هر عدد یک **درایه** می گویند.

تعداد سطرها و ستونهای یک ماتریس، **مرتبه ماتریس** نامیده می شود.

به عنوان مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & \sqrt{7} \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ از ۲ سطر و ۳ ستون تشکیل شده است. **درایه** a_{11} و a_{23} **ماتریسی** A 2×3 است.

در حالت کلی یک ماتریس با m سطر و n ستون به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

شماره سطر i و **شماره ستون** j در a_{ij}

منظور از a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام است.

به عنوان مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ -8 & 13 & 13 \\ 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}$ آنگاه: $a_{31} = 5$ $a_{21} = -8$ $a_{12} = 7$ 3×3

تست ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 & \sqrt{7} \\ 0 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $a_{12} + a_{23} + a_{31}$ کدام است؟

۱ (۱) $18 (2)$ $22 (3)$ $25 (4)$

$$13 + 8 + 4 = 25$$

تست ۲ ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ با شرایط $\begin{cases} i < j \\ i \geq j \end{cases}$ تعریف شده است. ماتریس A کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

تعریف

دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ با هم برابرند

هرگاه هم مرتبه باشند یعنی $n = q$ و $m = p$

و برای هر i و j داشته باشیم: $a_{ij} = b_{ij}$

به عبارت دیگر: دو ماتریس برابرند هرگاه هم مرتبه باشند

و درایه‌های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.

تست ۳ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x+y & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ x-y & -7 \end{bmatrix}$ مساویند. حاصل $x + y$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=-2$$

$$x+y=3+(-2)=1$$

ماتریس‌های خاص

۱- ماتریس سطری: ماتریسی است که فقط از یک سطر تشکیل شده است. به عنوان مثال:

$$A = [13 \quad 4 \quad -6]$$

۲- ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط از یک ستون تشکیل شده است. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 23 \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابر باشند. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -8 & 11 & 32 \\ 7 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را ماتریس مربعی مرتبه n می‌گویند.

درایه‌هایی به صورت a_{ii} ، درایه‌های قطر اصلی ماتریس مربعی نامیده می‌شوند. به عنوان مثال در ماتریس فوق $a_{11} = 1$ ، $a_{22} = 11$ و $a_{33} = 5$ درایه‌های قطر اصلی هستند.

۴- ماتریس بالا مثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های پائین قطر اصلی آن صفر هستند. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس پائین مثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر هستند. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 15 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر هستند. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

۷- ماتریس اسکالر: ماتریسی است قطری که همه درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند. به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = [2]_{1 \times 1}$$

۸- ماتریس همانی: ماتریسی است قطری که همه درایه‌های قطر اصلی آن برابر با یک باشد. ماتریس همانی مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3 \quad \text{همانی}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$

تست ۴ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & a-c \\ 0 & 2a-b & 0 \\ 0 & 0 & b+4 \end{bmatrix}$ اسکالر باشد آنگاه حاصل abc کدام است؟

$\begin{cases} a-c=0 \\ 2a-b=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c=3 \\ a=3 \\ b=1 \end{matrix} \Rightarrow abc = 3 \times 1 \times 3 = 9$

تست ۵ A یک ماتریس اسکالر 3×3 است. اگر $4A = 8B = -C$ و مجموع درایه‌های ماتریس $A + B + C$ برابر با $\frac{-15}{2}$ باشد آنگاه ماتریس B

کدام است؟ قلمچی ۳ مرداد ۱۴۰۴

$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}_{3 \times 3} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k I_3$

$B = \frac{1}{4}A = \frac{k}{4}I_3$

$C = -4A = -4kI_3$

$A + B + C = (k)I_3 + (\frac{k}{4})I_3 - 4kI_3 = (\frac{-15}{4})kI_3$

$\frac{-15}{4}k = \frac{-15}{2} \Rightarrow k = 2$

عملیات روی ماتریس‌ها
 عملیات روی ماتریس‌ها عبارتند از:
 ۱- ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس ۲- جمع و تفاضل ماتریس‌ها ۳- ضرب ماتریس‌ها ۴- توان‌های یک ماتریس

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

از ضرب عدد حقیقی r در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، ماتریسی مانند $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ به دست می‌آید به طوری که برای هر i و j داشته باشیم:

$b_{ij} = ra_{ij}$ به عبارت دیگر، عدد حقیقی r در همه درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

به عنوان مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 18 & 15 & -12 \\ -6 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

خواص ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد آنگاه:

$$1 \times A = A$$

$$(-1) \times A = -A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$0 \times A = [0]_{m \times n} = \bar{0}_{m \times n}$$

$$r, s \in \mathbb{R} \Rightarrow r(sA) = s(rA) = (rs)A$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \vdots \quad 5(7A) = 35A$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} x-7 & 6 \\ 12 & -2x \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} y-5 & 6 \\ 12 & x+y \end{bmatrix}$ و $A = B$ آنگاه x و y را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 3x-11 & 12 \\ 24 & -6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y-10 & 12 \\ 24 & 2x+2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-11=2y-10 \\ -6x=2x+2y \Rightarrow y=-4x \\ -8x=2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x-2y=11 \Rightarrow 3x-2(-4x)=11 \Rightarrow 11x=11 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-4$$

جمع و تفاضل ماتریس ها

اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه $m \times n$ باشند آنگاه حاصل جمع آنها ماتریسی $m \times n$ مانند C است که هر درایه آن از جمع درایه‌های نظیر به نظیر ماتریس‌های A و B به دست می‌آیند.

به عبارت دیگر اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ آنگاه:

$A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n} \quad \forall i, j: c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -3 \\ 9 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$2 \times 3 \quad 2 \times 3 \quad 2 \times 3$

به عنوان مثال:

دقت کنید که حاصل جمع ماتریس‌هایی که هم مرتبه نیستند تعریف نشده است!

خواص جمع ماتریس‌ها

اگر A و B و C سه ماتریس هم مرتبه باشند آنگاه :

(۱) خاصیت جاہ جایی

$$A + B = B + A$$

(۲) خاصیت شرکت پذیری

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

(۳) عضو خنثی (بی اثر)

$$A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$$

(۴) عضو قرینه

$$A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}$$

(۵) توزیع پذیری (پخشی)

$$r \in R \Rightarrow r(A + B) = rA + rB$$

(۶) توزیع پذیری (پخشی)

$$r, s \in R \Rightarrow (r + s)A = rA + sA$$

$$Q_A + Y_A = V_A$$

$$\psi(r_A + B) = \psi_A + \psi_B$$

تفاضل ماتریس‌ها نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ آنگاه:

$$A - B = D = [d_{ij}]_{m \times n} \quad \forall i, j : d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

به عبارت دیگر هر درایه ماتریس D از تفاضل درایه‌های نظیر به نظیر A و B به دست می‌آید.

به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 13 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس‌های A و B را با درایه‌های شان مشخص کنید.

$$\begin{cases} A + B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{+} 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 10 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div 2} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

نست ۱ اگر $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $2A + 3B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 9 \\ -5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس $A + B$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 2A + 3B = C \\ 4A - B = D \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 2A + 3B = C \\ 12A - 3B = 3D \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 14A = C + 3D$$

$$\Rightarrow 14A = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 10 & 0 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 3 & 27 \\ -10 & 42 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 14 & 28 \\ 0 & 42 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 14} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = 4A - D \Rightarrow \dots$$

اگر $A + 2X = B + 4I$ باشد، حاصل جمع درایه‌های ماتریس X کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

$$3 - 1 + 1 + 3 = 6$$

۴ (۲)

۱ (۱)

قلمچی ۳ مرداد ۱۴۰۴

$$A + 2X = B + 4I$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2X = (B + 4I) - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و $1 \times n$ و B ماتریسی ستونی و $n \times 1$ باشد آنگاه حاصل ضرب A در B عددی است حقیقی که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \Rightarrow AB = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = (5 \times 3) + (-4 \times 7) + (8 \times 2) = 15 + (-28) + 16 = 3$$

مثال: حاصل ضرب ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$