

ویژه پایه یازدهم

معادلات

تحصیل باما

مهندس آریان حیدری

Arian.heidarii Arianheidarioriginal Arianheidarii Arianheidarii

تحصیل باما

معادلهٔ درجه ۲

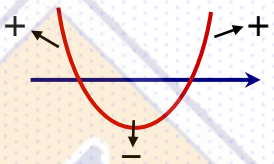
$y = ax^۲ + bx + c$

$ax^۲ + bx + c = ۰$ $\quad \Delta = b^۲ - ۴ac$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

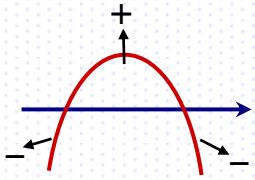
$a > ۰$ $\quad$ $a < ۰$

$\Delta > ۰ \Rightarrow$ دو ریشه متمایز

(قابل تجزیه به حاصلضرب دو عامل درجه ۱)



گاهی + گاهی −



استفاده در تعیین علامت

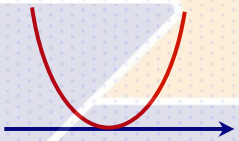
$\Delta = ۰ \Rightarrow$ دو ریشه مساوی

(یه ریشه مضاعف)

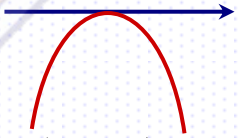
$\downarrow$

$x = \frac{-b}{۲a}$

(قابل تجزیه به مربع کامل)



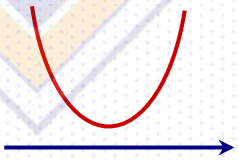
همواره + یا ۰



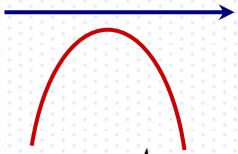
همواره − یا ۰

$\Delta < ۰ \Rightarrow$ بدون ریشه

(غیر قابل تجزیه)



همواره +



همواره −

$$\begin{cases} s = \frac{-b}{a} \\ p = \frac{c}{a} \\ T = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \end{cases}$$

(چرا؟)

تحصیل باما

کاربردهای P, S

I) تعیین ریشه‌ها (صفرها) و بالعکس



۱) $x^2 - 7x + 10 = 0$

۲) $x^2 + 7x + 10 = 0$

۳) $x^2 - 3x - 10 = 0$

۴) $x^2 + 3x - 10 = 0$

۱) $x^2 - 11x + 24 = 0$

۲) $x^2 + 11x + 24 = 0$

۳) $x^2 - 5x - 24 = 0$

۴) $x^2 + 5x - 24 = 0$

---

۵) $x^2 - 22x + 96 = 0$

۶) $x^2 - 12x - 189 = 0$

۷) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

۸) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - 6 = 0$

۵) $x^2 - 18x + 72 = 0$

۶) $x^2 - 8x - 128 = 0$

۷) $3x^2 - 18x - 48 = 0$

۸) $\frac{x^2}{3} + \frac{26x}{3} - 9 = 0$

---

۹) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

۱۰) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

۱۱) $4x^2 + 5x - 6 = 0$

۹) $4x^2 - 7x + 3 = 0$

۱۰) $5x^2 - x - 6 = 0$

۱۱) $2x^2 - 11x + 5 = 0$

تحصیل باما

۱۲) $۴x^۲ + ۲x - ۲۰ = ۰$

۱۳) $x^۲ - \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} = ۰$

۱۴) $۶x^۲ + ۲۷x - ۲۴۳ = ۰$

۱۵) $x^۲ - ۷x + ۱۳ = ۰$

۱۶) $x^۲ + ۲x - ۱۱ = ۰$

۱۲) $۱۸x^۲ - ۳x - ۳۶ = ۰$

۱۳) $\frac{۵}{۲}x^۲ + x - \frac{۷}{۲} = ۰$

۱۴) $۶x^۲ + ۸x - ۶۴ = ۰$

۱۵) $x^۲ + ۵x + ۷ = ۰$

۱۶) $x^۲ - ۲x - ۶ = ۰$

معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش ..... و ..... باشد.

۱) ۲,۳ ⟶

۲) $-۲,-۳$ ⟶

۳) $-۲,۳$ ⟶

۴) $۲,-۳$ ⟶

۲) ۴ ,۷ ⟶

۲) $-۴,-۷$ ⟶

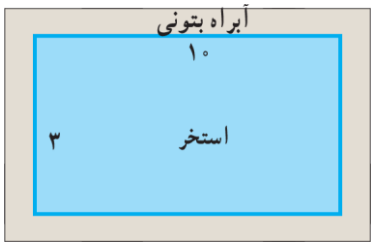
۳) $-۴,۷$ ⟶

۴) $۴,-۷$ ⟶

مثال ۱: اگر $x = -۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲ - mx - ۷ = ۰$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟

تحصیل باما

مثال ۲ : یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



مثال ۳ : طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

مثال ٤ : دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها ۱/۵ − و حاصل‌ضربشان ۷ − باشد.

مثال ٥ : ابعاد مستطیلی با محیط ۱۱ و مساحت ۶ را بیابید.

مثال ٦ : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

مثال ۷ : یکی از ریشه‌های آن، دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

II) تعیین علامت ریشه‌ها

دو ریشه منفی: Δ، S، p

دو ریشه مثبت: Δ، S، p

❖ **نتیجه:** وقتی $ac<0$ حتماً $\Delta>0$ است.

دو ریشه مختلف العلامت: Δ، S، p

مثال ۸: علامت ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود، تعیین کنید:

۱) $x^2+4x-5=0$

۲) $3x^2-7x+1=0$

۳) $x^2+6x+5=0$

۴) $-x^2+2x-1=0$

۵) $-x^2+7x-13=0$

تحصیل باما

مثال ۹: در معادله $2x^2-(2m+1)x+m=0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که:

۱) مجموع ریشه‌ها برابر ۳ باشد.

---

۲) حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{-5}{2}$ باشد.

---

۳) ریشه‌ها قرینهٔ هم باشند.

---

۴) ریشه‌ها عکس هم باشند.

---

۵) یک ریشه، دو برابر دیگری باشد.

---

۶) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد.

---

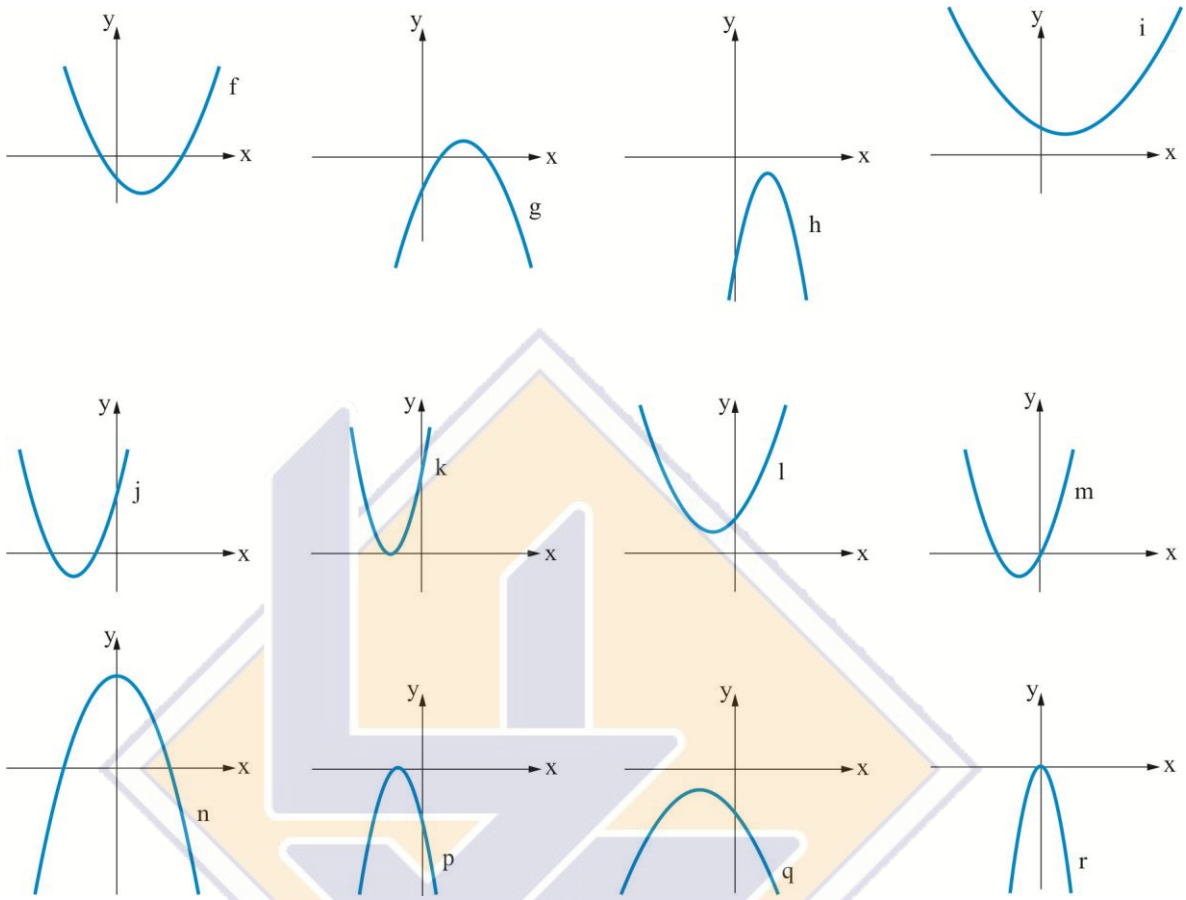
۷) دو ریشه مثبت داشته باشد.

---

۸) دو ریشهٔ منفی داشته باشد.

تحصیل باما

مثال ۱۰ : با توجه به نمودارهای زیر،جدول را کامل کنید:



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
علامت b	−							+			−	
علامت c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌های متمایز	دو							دو			صفر	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

❖ نکتهٔ فوق خفن برای پیدا کردن علامت b :

b : $\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right.$

III) معادلات دو مجذوری

$$ax^4+bx+c=0 \xrightarrow{x^2=t} at^2+bt+c=0$$
$$\begin{cases} t>0 \rightarrow \\ t<0 \rightarrow \end{cases}$$

مثال ۱۱: ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود، تعیین کنید:

۱) $2x^4+3x^2+2=0$

۲) $3x^4-6x^2+3=0$

۳) $2x^4+8x^2+8=0$

۴) $x^4+3x^2-18=0$

۵) $x^4-8x^2+12=0$

۶) $x^4+8x^2+15=0$

۷) $4x^6+1=5x^3$

تحصیل باما

۸) $(x^{۲}-۱)^{۲}+(x^{۲}-۱)-۲=۰$

۹) $(۴-x^{۲})^{۲}-(۴-x^{۲})=۱۲$

۱۰) $(\frac{x^{۲}}{۳}-۳)^{۲}-۷(\frac{x^{۲}}{۳}-۲)+۶=۰$

تحصیل باما

IV) معادلات درجهٔ سوم ساده

مثال ۱۲: صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

۱) $f(x) = x^3 - 4x$

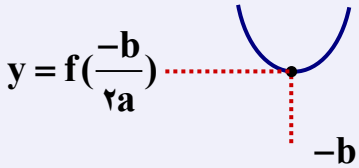
---

۲) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$

مثال ۱۳: مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

تحصیل باما

رأس سهمی تابع درجهٔ دو



$y = f(\frac{-b}{2a})$

$x = \frac{-b}{2a}$ معدل ریشه‌ها (معدل هر دو نقطه هم‌عرض)

* Min یا max تابع

مثال ۱۴: مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را پیدا کنید:

۱) $y = 3x^2 + 6x + 5 = 0$

۲) $y = -(x+1)^2 + 3$

مثال ۱۵: راکتی (توپ فوتبالی) به طور عمودی به بالا شلیک می‌شود و t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری زمین است. اگر معادلهٔ حرکت آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ یا $h(t) = 5t(4-t)$ باشد:

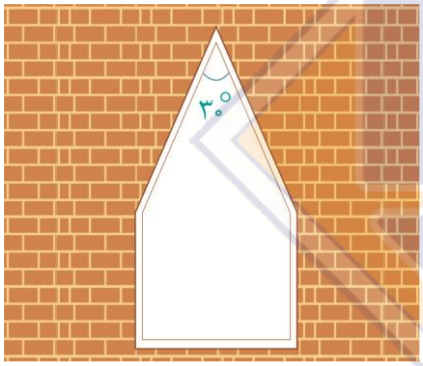
۱) چقدر طول می‌کشد تا به بالاترین ارتفاع ممکن برسد؟

۲) ارتفاع نقطهٔ اوج چقدر است؟

۳) چند ثانیه پس از پرتاب، به زمین برمی‌گردد ؟

مثال ۱۶ : قراراست در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن گردد.

مثال ۱۷ : پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 30° قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟



❖اگر مثلث، متساوی‌الاضلاع بود ، چی؟

مثال ۱۸ : استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم با فرض $\pi = 3$ ، ۲۱۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

۱) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود.

۲) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

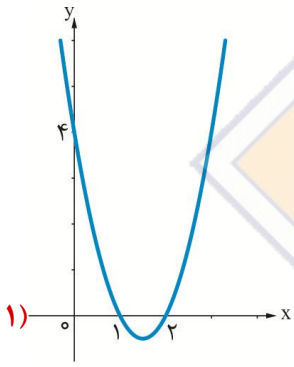
تحصیل باما

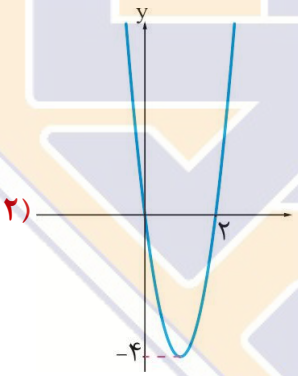
رسم و تشخیص نمودار تابع درجه دوم

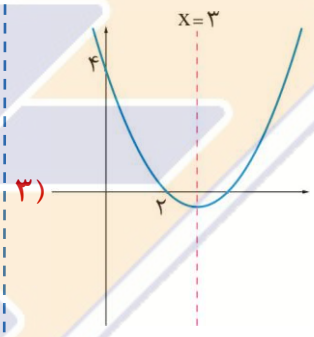
① a و c
- a (جهت گودی)
- c (عرض از مبدأ)

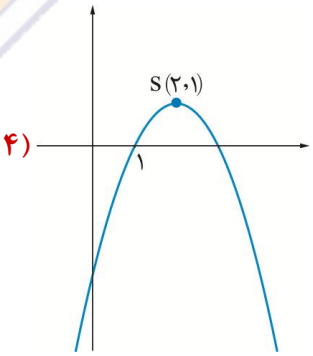
② نقاط:
- ریشه‌ها (صفرهای تابع)
- رأس
- سایر نقاط

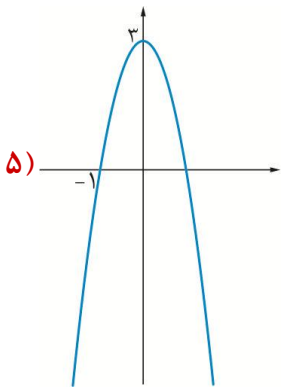
مثال ۱۹ : معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید:

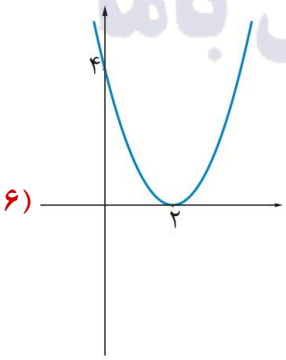
۱)


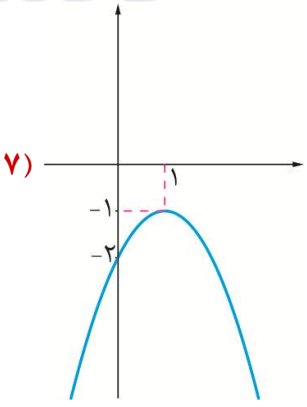
۲)


۳)


۴)


۵)


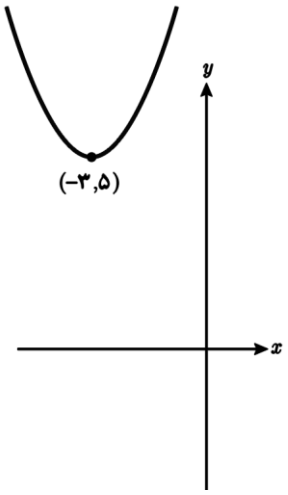
۶)


۷)


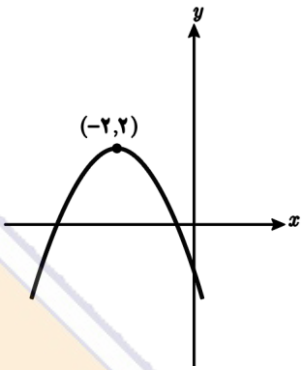
تحصیل باما

مثال ۲۰: هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است که در آن $|a|=1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

۱)



۲)



تحصیل باما

و امّا... کنکور!

۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$ (ریاضی ۹۸)

ترفند Δ :

خط مبلک ۱ در معادلات درجه دو پارامتری:

ضریب x^2 پارامتری ...

---

۲. سهمی $y=-mx^2+mx+1$ و خط $y=-m-x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

---

۳. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$، همواره پایین محور xها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

۴. معادله درجه دوم $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

خطر مهلک ۲ در معادلات درجه دو پارامتری:

هرجا...

۵. اختلاف ریشه‌های معادله $x^۲+۲kx+۵=۰$ برابر $\frac{۴}{۳}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^۲}{۲}\right]$ کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۶. ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعده آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعده این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید ۴/۵ برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۴)

۱) ۸ ۲) ۱۴/۵ ۳) ۱۶/۵ ۴) ۲۸

۷. اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a^۲+b^۲-۱۲)x+a+b-۱=۰$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

---

۸. معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲+mx+m+۶=۰$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹، مشابه تجربی خارج ۹۷ و تجربی ۹۶)

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۲)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(-۶,-۴)$

---

۹. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^۴-۷x^۲-۵=۰$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^۲-۳SP+۲S$، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $۵۹-۷\sqrt{۶۹}$ ۲) $۷+\sqrt{۶۹}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵۹+۷\sqrt{۶۹}$

تحصیل باما

۱۰. به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2 - ax + 4 = 0$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

---

۱۱. نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{1}{18}$ ۲) $-\frac{5}{18}$ ۳) $-\frac{7}{6}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

---

۱۲. اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۳. رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -4 ۴) -8

---

۱۴. رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) -6 ۲) ۶ ۳) -18 ۴) ۱۸

---

۱۵. نقاط $(-4, 3)$ و $(-4/5, -1)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

تحصیل باما

۱۶. نقاط $(۱,\beta)$ و $(-۵,\beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع کند مقدار β کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

---

۱۷. نقاط $A(۲a+۳,a-۲)$ و $B(۷-۲a,a-۲)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه $S(b,b-۲)$ رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۴)

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

---

۱۸. به ازای چند مقدار صحیح m، نقطه مینیمم تابع $y=x^۲-mx+۲-m$ در ناحیه اول محورهای مختصات قرار دارد؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تحصیل باما

۱۹. در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{2}$ است؟ (تجربی ۱۴۰۳)

۱) ۳ ۲) هیچ مقدار a ۳) ۲ ۴) ۱

---

۲۰. در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

---

۲۱. تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

تحصیل باما