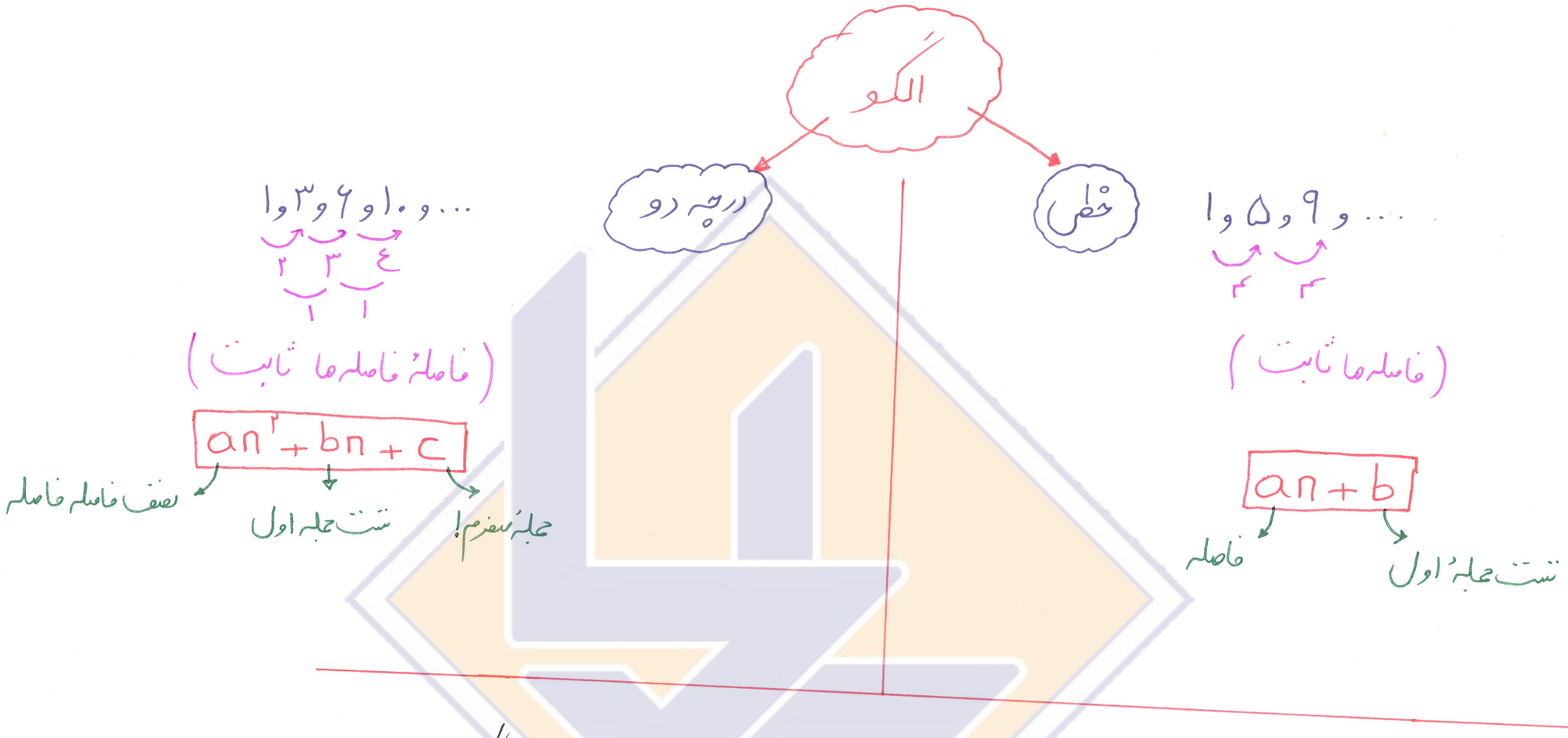


* در هر دو نوع، اگر به جای رشته دنباله، جملات خاصی از الگو را داشتیم ← جایگذاری و حل دستگاه

تحصیل باما

دنباله‌های حسابی و هندسی

حسابی (عددی) (الگوی خطی)

$a_{n+1} = a_n + d$ ← افزایشی (+) / کاهشی (−)

۳ و ۷ و ۱۱ و ... → $+d=۴$

۱- دو جمله‌ای
- تفاضل دو جمله‌ای → d بازی

۲- جمع دو جمله‌ای ←
- حالت خاص ↓
- سه جمله متوالی داری ← بعدی + قبلی = (وسطی)^۲ (متساوی الفاصله)

$a_m + a_n = a_L + a_K$ ← جمع دو جمله‌ای
$(m+n = L+k)$
(تعداد جملات دو طرف برابر)

۳- سایر حالات ← همه برحسب یک جمله (اون که داری، و گرنه a_1)
(ضرب، تقسیم و ...)

حالت خاص: مجموع جملات متوالی:

فقط انشایی
- شماره جمله‌ها رو داری ← وسطی × تعداد
- حدِ جملات رو داری ← $\frac{\text{اولی} + \text{آخری}}{۲}$ × تعداد

فقط ریاضی → **مسئله معروف ۱ در دنباله حسابی: جملات مشترک**

جملات مشترک دو دنباله حسابی، تشکیل دنباله حسابی جدیدی می‌دهند که برای پیدا کردن d در آنها کافیست دو جملهٔ اول مشترک را پیدا کنیم.

حالت خاص: مجموع جملات متوالی:

فقط انشایی

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

هندسی

$a_{n+1} = a_n \times q$ ← افزایشی (بزرگتر از ۱) / کاهشی (بین صفر و ۱)

۳ و ۱۲ و ۴۸ و ... → $\times q=۴$

۱- دو جمله‌ای
- تقسیم (نسبت) دو جمله‌ای → q بازی

۲- ضرب دو جمله‌ای ← (فقط ریاضی و تجربی)
- حالت خاص ↓
- سه جمله متوالی داری ← بعدی × قبلی = (وسطی)^۲ (متساوی الفاصله)

$a_m \times a_n = a_L \times a_K$ ← ضرب دو جمله‌ای
$(m+n = L+k)$
(تعداد جملات دو طرف برابر)

۳- سایر حالات ← همه برحسب یک جمله (اون که داری، و گرنه a_1)
(جمع و تفریق و ...)

حالت خاص: حاصل ضرب جملات متوالی: (فقط ریاضی و تجربی)

تعداد (وسطی)

تجربی

مشتقل: به بارگاه حسابی، به بارگاه هندسی

درس:

۱- چک کردن دنباله ثابت

۲- حسابی: a_m, a_n, a_L
هندسی: متوالی
$q = \frac{m-n}{n-L}$ ← به بارگاه حسابی، به بارگاه هندسی

۳- هندسی: a_m, a_n, a_L
حسابی: متوالی

فقط ریاضی و تجربی

↑ مسئله معروف ۲ در دنباله حسابی: دسته‌بندی

پیدا کردن نظم دسته‌ها در:

- جملهٔ آخر هر دسته: مربع کامل، مکعب کامل، خود
یا
- تعداد جملات هر دسته

با هم تشکیل دنباله جدیدی ...

تحصیل بانا

مجموعه‌ها

فقط ریاضی

چند مجموعه‌ها :

فارسی

رسم نمودارون :

* بیرون کمکی :

* $A - B = A \cap B'$

* $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$

کل

A فقط
$(A - B)$

A

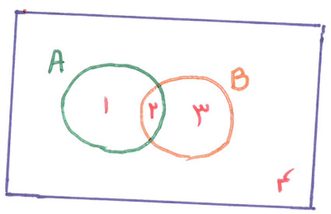
B

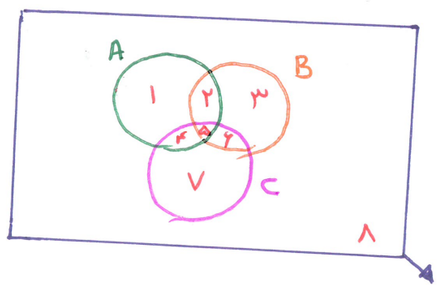
A و B هم
$(A \cap B)$

B فقط
$(B - A)$

نه A نه B

* رسم نمودارون با شماره گذاری :





برای سه مجموعه‌ای ها در وهلهٔ اول سعی کنید با حالت خاص $C = \emptyset$ و دو مجموعه‌ای اش کنید.

* A یا B

حداقل یکی از A یا B

$(A \cup B)$

* فقط یکی

$((A - B) \cup (B - A))$

$((A \cup B) - (A \cap B))$

همواره از اشتراک شروع می‌کنیم

معلوم ✓

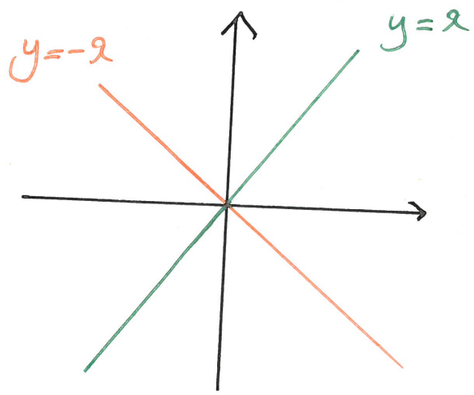
معلوم : $\alpha \leftarrow \beta$

* گاهی دیتای داده شده کم است و جواب مخصوص بنظر نداره ← حداقل و حداکثر می‌پرسه

مواظب "کلمه متمم" و "$A \cup B = U$" در صورت تست باشید.

تحصیل باما

پیمسازهای نواحی مختلف



فقط اول ؟

فقط دوم ؟

فقط سوم ؟

فقط چهارم ؟

یادآوری ماسخیف !

برخورد دو منحنی

بدون برخورد

f

g

f=g

بدون ریشه

↓ درجه دو

Δ<0

تماس

f

g

f=g

ریشه مضاعف

↓ درجه دو

Δ=0 یا x=-b/2a

جذر کامل بشه

فراتر از درجه دو

↓

ریشه اش که هم معادله

هم مشتق معادله

را صفر می کند

تقاطع

f

g

f=g

ریشه ساده

↓ درجه دو

Δ>0

تحصیل بابا

معادلهٔ درجه دو

$$ax^2+bx+c=0$$

$$S=\frac{-b}{a}$$

$$P=\frac{c}{a}$$

$$T=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$ طول یا رخطی که بین دو ریشه جدا می‌کند

روابط بین ریشه‌ها در یک معادله:

متقارن: بدون عوض شدن S و P

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=S^2-2P\\ \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS\end{cases}$$

نامتقارن: تا جای ممکن متقارن بیرون می‌کشیم، پس برای مثلث

نامتقارن باقی مانده:

تک ریشه نامتقارن ← صدق / پیدا!

دو ریشه نامتقارن ← S یا P تشکیل!

روابط بین ریشه‌ها در دو معادله:

طرفین دو رابطه را با هم S یا P بگیر!

پیدا کردن ریشه‌ها: (و بالعکس!)

$$x^2-7x-30=0$$

$$2x^2+3x-14=0$$

* معادلهٔ درجه دو با مزدوج گویا، یه ریشه: $a-\sqrt{b}$ ← ریشه دیگه: $a+\sqrt{b}$

تعیین علامت ریشه‌ها:

فقط ریاضی

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$S=\frac{-b}{a}$$

$$P=\frac{-d}{a}$$

* دو ریشه + → $\Delta>0$، $S>0$، $P>0$

اول S و P، Δ آخر با $S2$

* دو ریشه − → $\Delta>0$، $S<0$، $P>0$

* دو ریشه مختلف العلامت → $ac<0$

گذشتن از مرحلهٔ ناچیز محاسبات

گذشتن یا نگذشتن از ریشه نوعی؟

بررسی علامت ریشه‌ها و a

معادلات دو پدری

$$ax^4+bx^2+c=0$$

$x^2=t$

$$at^2+bt+c=0$$

$\begin{cases}t>0 \longrightarrow & \text{دو تا } x\\ t<0 \longrightarrow & \text{هیچی } x\end{cases}$

* درصورت داشتن ریشه، مجموع ریشه‌ها همواره صفر است.

تحصیل باما

سهمی درجه دو

$y = ax^2 + bx + c$ ← عرض از مبدا

y

x

راس سهمی

- دهانه باز: $a > 0$
- دهانه بسته: $a < 0$
- دهانه نقطه‌ای: $\Delta = 0$

$x = \frac{-b}{2a}$

معادل ریشه‌ها

$y = -2(x+1)(x-5)$

$y = 3x^2 - 7x + 1$

معادل روی نقطه هم عرض

سهمی از نقاط $(3, m)$ و $(4, m)$ می‌گذرد

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقطه $(5, c)$ می‌گذرد

ادبیات مای معادل

- بیشترین (کمترین) مقدار سهمی ← (خواست به a بالشه) علامت
- تنها خط افقی مماس بر سهمی
- محور تقارن سهمی

تحصیل بکام

معادله

گویا

۱- تجزیه مخرج ها (مواظب ساده شدن باش)

۲- ضرب طرفین معادله در عبارتی که تمام مخرج ها را از بین ببرد.

۳- حل معادلهٔ درجه ۱ یا ۲ بدست آمده

۴- توجه به اینکه ریشه های به دست آمده، ریشه مخرج نباشند

چه وقت ها ریشه نداریم؟

در مرحله ۳ ریشه به دست نیاید
یا
در مرحله ۴ ریشه به دست آمده رد شود

گنگ

۱- رادیکال های موجود در طرفین معادله، پیش می کنیم.

۲- به توان دو رساندن طرفین تا جایی که تمام رادیکال ها از بین بروند.

۳- حل معادلهٔ درجه ۱ یا ۲ به دست آمده

۴- توجه به اینکه ریشه های به دست آمده، در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

حالات خاص

عبارت شامل چند رادیکال
مجموع چند عبارت زوج برابر صفر
رادیکال های زیاد یا تودرتو یا ریشه های مشترک

mix

خواست به هردو ما جوابشه!

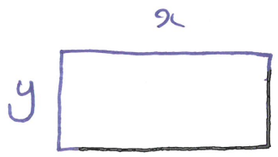
بویژه

تعداد جواب ها؟ ← رسم نمودار

معادلات گویای کاربردی

- صنعت
- نفت
- همکاری
- سرعت

صنعت



$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\simeq 1{,}6$$

نفت

$$\begin{matrix}x\ \text{غ}\\ y\ \text{آب}\end{matrix}\longrightarrow\frac{x}{x+y}$$

تغییرات x ← درصورت و مخرج

تغییرات y ← در مخرج

همکاری

حجم کاری در یک واحد زمان افراد با هم + می شود:

A: t ساعت → ۱ ساعت : $\frac{1}{t}$ کار

B: t' ساعت → ۱ ساعت : $\frac{1}{t'}$ کار

A,B: ؟ ساعت ← ۱ ساعت : $\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}$

سرعت

Time Based : $t=\frac{x}{V}$

t_1+t_2 : مجموع زمانهای رفت و برگشت (کل مسیر)

t_1-t_2 : اختلاف زمانهای رفت و برگشت

↓

سرعت کمتر : زمان طولانی تر

* سرعت متوسط؟

تحصیل باما

نامعادله

$M < \frac{ax+b}{cx+d} < N$ → مثل دوطرف فاقدریشهٔ مخرج

جواب بین یا خارج ریشه ها ؟

اون که شامل ریشهٔ مخرج نیست

درجه ۲ :

قدرمطلق :

$|0|<k \rightarrow -k<0<k$

$|0|>k \rightarrow 0>k$ یا $0<-k$

52

نشد

حالت خاص ← دوطرف فاقدریشه مخرج :

۱- تبدیل نامعادله به معادله

۲- حل معادله و پیداکردن ریشه های (بیشتر صفر) صعودی (معمولاً احدس بویژه به کمک نمودار)

۳- جواب، بین یا خارج ریشه ها ؟

↓

عددگذاری

یا

تشخیص از صورت تست

۴- ریشه مکرر زوج :

نامساوی همراه با مساوی : به جواب اضافه

نامساوی فاقدمساوی : ازجواب حذف

مثال :

$[a,b] \cup \{c\}$

$(-\infty,a) \cup (b,c) - \{d\}$

حالت خاص ← حداقل یه طرف دارای ریشه مخرج :

۱- تجزیه و ترکیب

۲- حذف عبارتهای همواره + یا صفر

۳- حذف توان و درجهٔ فرد

۴- هرچه پایین مانده، میبریم بالا

۵- تعیین علامت عبارت باقی مانده : علامت خونه آخر: علامت ضریب پرتوان / علامتها یکی درمیون عوض

۶- ریشه مکرر زوج صورت :

نامساوی همراه با مساوی : به جواب اضافه

نامساوی فاقدمساوی : ازجواب حذف

۶'- ریشه مکرر زوج یا حذف شده مخرج :

ازجواب حذف

مثال :

$[a,b) \cup \{c\} - \{d\}$

$(a,b) \cup (c,+\infty) - \{d,e\}$

تحصیل باما

یادآوری‌های سخیف!

تابع
- دامنه: حل نشد ≤ 2
  - $\frac{1}{0} \to 0 \neq 0$
  - $\sqrt[زوج]{0} \to 0 \geq 0$
  - $\log_{\square}^{0} \to \begin{cases} 0 > 0 \\ \square > 0 \\ \square \neq 1 \end{cases}$
- برد: رسم نمودار با توجه به دامنه
- تعریف
  - به x ← به y
  - (هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه اول یکسان نیستند)

* توجه به توابع صعودی یا نزولی: سرونه دامنه ← سرونه برد
* توجه به توابع مضروف:

$[x]+[-x]$: $\begin{cases} 0 & \in Z \\ -1 & \notin \end{cases}$

$x-[x]$: $\begin{cases} 0 & \in Z \\ 0<x<1 & \notin Z \end{cases}$

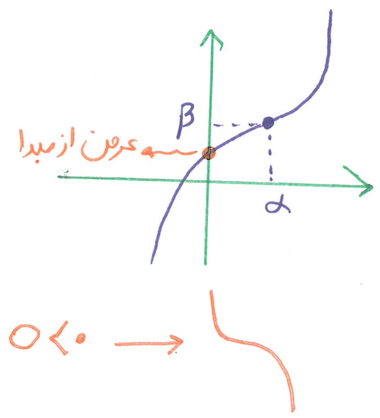
حالت خاص: دامنه‌ی (یه چیزی) f:

تغییرپذیر: محور xها / گزینه / دامنه: x

لایتغیر: ملاک عمل تابع برای خروجی: $\bigcirc$

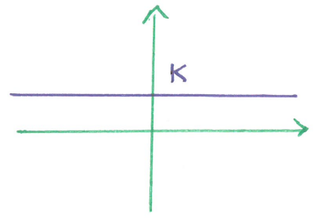
توابع خاص

- درجه‌ی ۳: با استفاده از اتحاد مکعب ببندید: $\bigcirc (x-\alpha)^3+\beta$



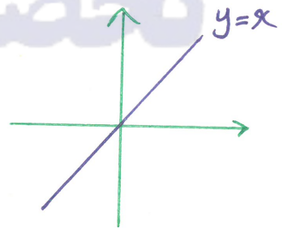
- ثابت: $(a,k)(b,k)\ldots(\ ,k)$ — تابع با بیشترین تک معنی — هم صعودی هم نزولی

$y=k$ → x و x^2 و ... در ضابطه نداره (مستقل از x)



- همانی: $(a,a)(b,b)\ldots(k,k)$ — نمیتونن ناصفر ۱ و ۳

$y=x$ → عدد ثابت و x^2 و ... در ضابطه نداره



تحصیل باما

ترکیب توابع

$fog(x)$

$?\ fog(x)$

فلش های برعکس

$fog\ ?$

فلش های وسی : { عدد ✓ ؛ α عدد $\to$ S1 $\xrightarrow{\text{نشد}}$ مثل ریم عقب‌دار و ببرد ؛ ؟ عدد $\to$ S2 $\xrightarrow{\text{نشد}}$ // مثل شامل چند عدد ؟ }

(؟ عدد = راسته)

$fog(x)$

$?$

۱- ورودی و خروجی از روی هم برعکس میان

۲- برای وسط ، دو تا زاویه رید : { خروجی g ؛ ورودی f }

تحصیل باما

وارون تابع

تعریف

$$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$$

$(1,2) \in f^{-1} \rightarrow (2,1) \in f$

$f^{-1}(3) = ? \rightarrow f(?) = 3$

$f^{-1}(?) = 4 \rightarrow f(4) = ?$

ضابطه

حیدروار! $\xrightarrow{\text{نشد}}$ S1

حیدروار: از نقطه به سر

آینه بر سر x آمده بریکس

* شرط لازم حیدر: تابع را برای تک x ها باشد
  ↓ نبود
  اتی‌ها

* در برعکس عمل نتوان زوج، $\pm$ فرضه زوج رایم
  ↓
  تشخیص از بُرد وارون
  (دامنهٔ تابع)

شرط لازم وارون پذیری

عدم وجود y تکراری: $1-1$



نمودار

نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم.

تلاقی f و f^{-1}

$(F = f^{-1})$

$f = f^{-1} \leftarrow y = x$ تلاقی روی

اکیداً صعودی: خطی و خطی $\sqrt{\ }$ $(mx+h)$ $\xrightarrow{f}$ $f^{-1} = \left(\frac{1}{m}\right)x + h'$

$m = -1 \leftarrow f = f^{-1} \leftarrow$ بی‌شمار

$m \neq -1 \leftarrow y = x$ تلاقی روی $\leftarrow f = f^{-1}$

ممکنیک: $\frac{ax+b}{cx+d}$ $\xrightarrow{\text{تذکر}}$ $ad - bc = 0$ ↓ وارون‌پذیر نیست (تابع ثابت)

$a+d = 0 \leftarrow f = f^{-1} \leftarrow$ بی‌شمار

$a+d \neq 0 \leftarrow y = x$ تلاقی روی $\leftarrow f = f^{-1}$

$f \circ f^{-1}$

$f^{-1} \circ f(x) = x \quad (x \in D_f)$

$f \circ f^{-1}(x) = x \quad (x \in R_f)$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$ (در حالت کلی)

↓

$D_f = R_f$ فقط موقعی برابرند که

تحصیل باما

تبدیل نمودار

$$af(cx+d)+b$$

تغییرات روی محور yها: مستقیم با تقدم و تاخر روی y

تغییرات روی محور xها: برعکس با تقدم و تاخر برعکس

مثال: $(2,3) \longrightarrow \left(3a+b \text{ و } \frac{2-d}{c}\right)$

قرینه:

- قرینه نسبت به محور xها: $y \to -y$
- قرینه نسبت به محور yها: $x \to -x$
- قرینه نسبت به مبدا مختصات: هردو

برعکس: $f(x) \longrightarrow f(\text{یه چیزی برحسب } x)$

برعکس:

- تغییرات روی محور xها: مستقیم با تقدم و تاخر روی x
- تغییرات روی محور yها: برعکس با تقدم و تاخر برعکس

مثال: $(5,7) \longrightarrow \left(5c+d \text{ و } \frac{7-b}{a}\right)$

تحصیل نانا

یکنوایی

تابع عادی:

رسم یا نکته

نکته:

f	g	f+g
ص	ص	ص
ن	ن	ن
ص	ن	?

چند ضابطه‌ای:

تک تک ضابطه‌ها ok باشند.

و

در نقطه‌ی مرزی هم روند یکنوایی حفظ شود:

a

صعودی: $f(\bar{a}) < f(\dot{a})$

نزولی: $f(\bar{a}) > f(\dot{a})$

یکنوا:

اکیداً صعودی:

$$\circ < \square \iff f(\circ) \lneq f(\square)$$

اکیداً نزولی:

$$\circ < \square \iff f(\circ) \gneq f(\square)$$

هم صعودی هم نزولی: تابع ثابت

غیریکنوا: نه صعودی نه نزولی:

~

* اگر گفتند تابع چند ضابطه‌ای، 1-1 (وارون‌پذیر) باشد

↓

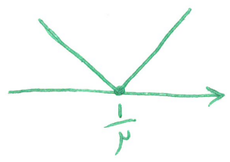
فرض کن: قدراست اکیداً صعودی (نزولی) باشد

ازروی ضابطه‌ها بفهم

تحصیل باما

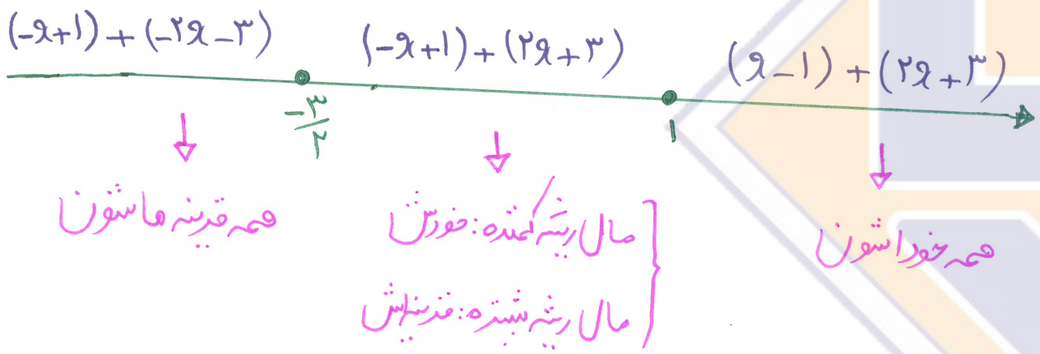
کار با قدر مطلق

یه قدر : $|2x-1|$:



$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \rightarrow 2x-1 \\ x < \frac{1}{2} \rightarrow -2x+1 \end{cases}$$

دو قدر : $|x-1|+|2x+3|$:



تحصیل باما

اعمال بر روی توابع

x : x مشترک دو تابع

y : روی yهای آن xهای مشترک، هر کاری که گفته بگن، بکن.

تذکر:

در عمل تقسیم، حواست به مخرج باشه.

فقط ریاضی و تجربی

ترکیبی fog و وارون و اعمال

موارد بالا

تحصیل باما

نمایی و لگاریتم

تعریف: $y = a^x \xrightarrow{\text{وارون}} y = \log_a^x$

حالا بچرخونش مبارو!

معادله:

نمایی

- ضرب و تقسیم ← پایه‌ها یکسان یا قابل یکسان سازی ← توان‌ها هم یکسان
- جمع و تفریق ← + گیدی

لگاریتمی

پایه‌ها یکسان یا قابل یکسان سازی ←

۱- عدد ثابت به ور!

۲- زکد: در هر طرف باید حداکثر یه log خالی داشته باشیم!

ضریب به توان ← $\log$

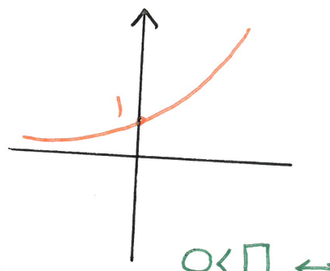
$+ و - \Rightarrow \times و \div$

۳- توجه به دامنه

پایه‌ها قابل یکسان سازی نبود ← + گیدی

نامعادله:

$a > 1$



$0 < \square \leftrightarrow f(\circ) < f(\square)$

(در نامساوی‌ها، جهت نامساوی مثل صبیه)

$0 < a < 1$



$0 < \square \leftrightarrow f(\circ) > f(\square)$

(در نامساوی‌ها، جهت نامساوی عوض میشه) (پس از یکسان سازی پایه‌ها)

مثال: $\log_{\frac{1}{5}}^{(x-2)}$ ← ریشه جلوی لگاریتم ← خط چین عمودی رو نمودار

مثال: $(\frac{1}{2})^{(-1)}$ ← عدد ثابت کنار نمایی ← خط چین افقی رو نمودار

نامعادله:

محاسبات:

$\log \circ = \square, \Delta$

۱- تعداد ارقام اصلی

شروع $\circ$:

- ۱ →
  - ۱ : رقم دوم $\Delta \leq 5$
  - ۲ : رقم دوم $\Delta > 5$
- ۲ →
  - ۳ : رقم دوم $\Delta < 5$
  - ۴ : رقم دوم $\Delta \geq 5$
- ۳و۴و۵و۶ $\xrightarrow{+2}$ ۵و۶و۷و۸
- ۷و۸و۹ → ۹

* اگر عدد و رقم لگاریتم‌ها توسط طراح داده شود ← مجهول به استفاده از همان (به کمک روابط لگاریتم)

حالت خاص ← کسری بده، کسری بخواد: 56

تحصیل باما

دو نکتهٔ خاص دیگر در توابع نمایی

ارتباط با دنباله‌های حسابی و هندسی :

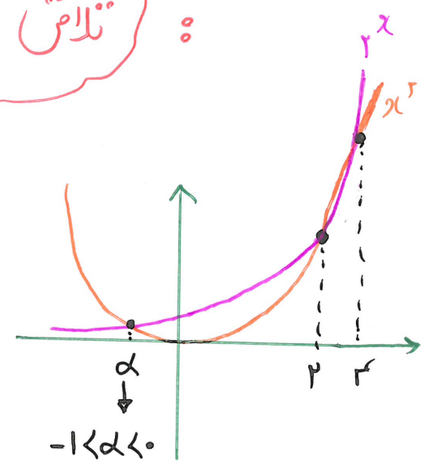
$y=a^x$: x ها دنباله‌ی حسابی ← y ها دنباله‌ی هندسی

↓

مثال: مجذورات جملات متوالی الفاصله در یک دنباله‌ی حسابی

مثال: فاصله‌ی بین مجذورات متوالی یک دنباله درجه ۲

تلاقی $y=2^x$ و $y=x^2$:



تحصیل باما

مسائل مربوط به پدیده های افزایشی و کاهشی

فقط ریاضی و انسانی

۱- تعیین q:

افزایش n درصدی یک پدیده: دنباله هندسی با $q = 1 + n\%$

کاهش n درصدی یک پدیده: دنباله هندسی با $q = 1 - n\%$

(نیمه عمر: $q = \frac{1}{2}$) ← به عدد نیمه عمر در پایان تست توجه کن!

۲- نوشتن معادله:

$$\text{ثانویه} = q^{\text{زمان}} \times (\text{اولیه})$$

۳- حل معادله با $\log$ گیری از طرفین و استفاده از روابط لگاریتم → فقط ریاضی

۴- { عدم توجه واحد زمان بیشتر از یک واحد (در ابتدای تست)
تبدیل به واحدهای زمانی داده شده و خواسته شده (در انتهای تست)

فقط ریاضی و تجربی: زلزله:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5\,M$$

E: انرژی آزاد شده در زلزله (ارگ)

M: شدت زلزله (ریشتر)

تحصیل باما

مثلثات مقدماتی

حل مثلث :

در مثلث قائم‌الزاویه (شکل مسئله) :

چی داده؟ / چی خواسته؟ ← بست مثلثاتی مناسب

* مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰° و ۶۰° ← قنبع!

محاسبه مساحت :

مثلث :

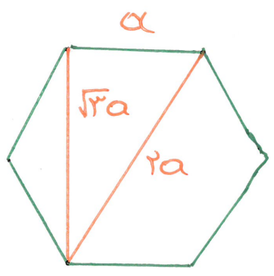
$\frac{1}{2}$ (حاصل ضرب دو ضلع) × sin (زاویه بین دو ضلع)

چهارضلعی‌ها :

$\frac{1}{2}$ (حاصل ضرب دو ضلع) × sin (زاویه بین دو ضلع)

$\frac{1}{2}$ (حاصل ضرب دو قطر) × sin (زاویه بین دو قطر)

شش‌ضلعی منتظم :



$S = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$

طول کمان :



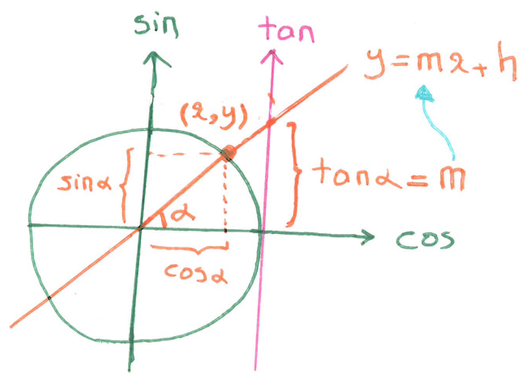
رادیان ← $R\times\theta$

max و min :

شناسایی تابع Base و گذاشتن max و min آن ← کلی (باید یک Base باشد)

بازه‌ی عدد ←
- سربازه ←
- ته‌بازه ←
- محل تغییر ربع ←

دایره مثلثاتی :



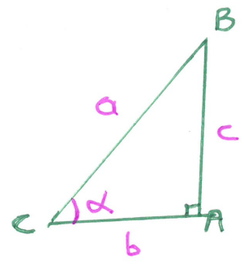
* هر خط مماس بر دایره، بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، عمود است.

تحصیل باما

مثلثات اصلی

رو فرمیولی خوب

رسم مثلث قائم‌الزاویه فرضی



$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{c}{a} \\ \cos\alpha = \frac{b}{a} \\ \tan\alpha = \frac{c}{b} \\ \cot\alpha = \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \,/\, \alpha \\ \text{یا} \\ 2\alpha \,/\, \alpha \end{pmatrix}$$

یه فرمیولی پی زاویه

$$S_1 :$$

یه فرمیولی یازاویه

ایجادتنگ زاویه حاده (۱)

$$: \begin{cases} \text{مرموز} & (۲) \\ \text{آریانفوف!} & (۳) \end{cases}$$

* مواظب ربع قرارگیری زاویه و تأثیرش روی علامت نسبت‌ها باش!

رو فرمیولی بد

رسم مثلث قائم‌الزاویه دقیق با نقاله

یا

معروفیات

یا

(غیره)

حفظ ریاضی

فرمول‌ها:

$$* \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$* \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

(ضرب sin و cos)

$$* \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

(تفاضل توان‌های زوج sin و cos)

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

(توان شان sin و cos)

اختیاری

$$* \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin\bigcirc : \begin{cases} 0 < \bigcirc < 60 & 0 \text{ تا } 0.8654 \\ 60 < \bigcirc < 70 & 0.9 \text{ تا } 0.95 \\ 70 \leq \bigcirc < 80 & 0.95 \text{ تا } 1 \\ 80 \leq \bigcirc < 90 & \end{cases}$$

○ باید:

ربع ۱، sin، رند

معروفیات

$\tan\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 26.5^\circ$

$\tan\alpha = 2 \to \alpha = 63.5^\circ$

$\tan\alpha = 3 \to \alpha = 71.5^\circ$

$\tan\alpha = 4 \to \alpha = 75.5^\circ$

$\tan\alpha = 5 \to \alpha = 78.5^\circ$

توهم همین طور sin

$\tan\alpha = \frac{1}{3} \to \alpha = 18.5^\circ$

$\tan\alpha = \frac{1}{4} \to \alpha = 14.5^\circ$

$\tan\alpha = \frac{1}{5} \to \alpha = 11.5^\circ$

توهم همین طور!

$\tan\alpha = \frac{3}{2}$ یا $\sqrt{2} \to \alpha = 56.5^\circ$

$\tan\alpha = \frac{2}{3}$ یا $\frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 33.5^\circ$

مسائل کاربردی رو فرمیولی بد

(معادله، دایره، هندسه)

فقط ریاضی

تایلو ← فرمول‌های بالا

ناتایلو ← زاویه را به صورت مجموع یا تفاضل دو زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه در

واستفاده از معروفیات!

حفظ ریاضی

استفاده از روابط زیر و تبدیل به رو فرمیولی خوب:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

تحصیل باما

مثلثات اصلی

دو فرمول زشت

فرمول اول را به کمک { روابط ساده ریاضی / روابط مثلثاتی }

تبدیل به

تک عدد = تک نسبت

حالات خاص

sin و cos با ضرایب مساوی + و -

توان دو:

$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$

در حالت برعکس

جذر:

خواست به ناچیه قرار گیری زاویه و علامت $\sin\alpha \pm \cos\alpha$ باشه

تمرین کتاب

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

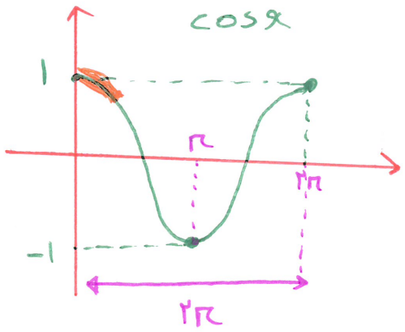
tan و cot با ضرایب مساوی + و -

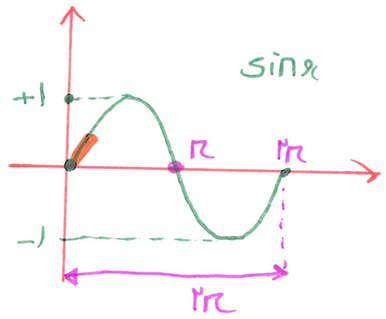
سینوس و کسینوس بنویس

$\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ ایجاد میشه

تحصیل بلما

نمودارهای مثلثاتی (I): sin و cos





$$a \sin(\cos)(cx+d)+b$$

نقطه گذاری ← توجه به دقت چندم؟!	۱) توجه به دوره تناوب: $f(x)=f(x+T)$ (روی محور xها، معکوس)
وقتی معلوم است موثر در آرمیدادی	۲) نقطه گذاری ← توجه به دقت چندم؟!

a, b

یکی از Max و Min و دیگری کدام از a و b معلوم

توجه به Max یا Min (همینجا توجه به آرمیدادی)

\+ نقطه گذاری

* وقتی d معلوم است، توجه به تاثیرش در آرمیدادی فراموش نشود!

یکی از Max و Min و دیگری از a و b معلوم

خودمون از روی a یا b معلوم، Max یا Min مجهول را به دست آورده و مانند حالت قبل حل می‌کنیم.

* وقتی a معلوم است، توجه به آرمیدادی بر روی c اعمال می‌شود.

هم Max و هم Min معلوم

$$\begin{cases} b = \text{وسط} \\ a = \text{نصف فاصله} \end{cases}$$

* موثر در آرمیدادی

(وقتی شروع نمودار معلوم نیست، خودمون می‌گیریم)

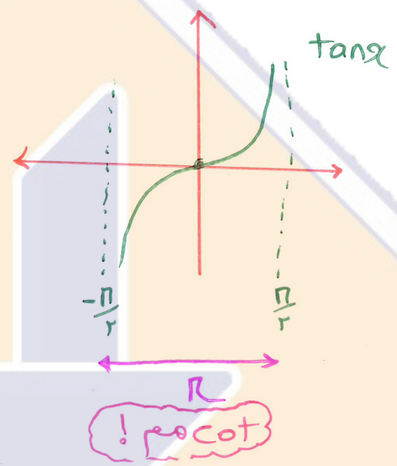
یا (یک دوره تناوب کامل باشد دوره تناوب قبلی را می‌گیریم)

عوامل موثر در کشاورزی ← a و c

تحصیل باما

نمودارهای مثلثاتی (II) :

tan



← در هر دوره‌ی تناوب، اکیداً یکنوا (صعودی یا نزولی) است
ولی در کل دامنه‌اش خیر!

→ $D = R - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$



تحصیل باما

* تذکر : برای پیدا کردن دوره‌ی تناوب، در توابع سنگین tan و cot ی، آنها را sin و cos ی نوشته و ساده می‌کنیم و سپس در تابع ساده‌تر حاصل، دوره‌ی تناوب را پیدا می‌کنیم.

معادله مثلثاتی

تک‌بُعد = تک‌بُعد

۱) $\sin\bigcirc = \sin\square$

$$\begin{cases}\bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + \pi - \square\end{cases}$$

۲) $\cos\bigcirc = \cos\square$

$$\bigcirc = 2k\pi \pm \square$$

۳) $\tan\bigcirc = \tan\square$

$$\bigcirc = k\pi + \square$$

* دوطرف معادله باید هم‌جنس باشند، اگر نبود، هم‌جنسشان می‌کنیم.

البته در حالت خاص:

۱) $\tan\bigcirc = \cot\square$

یا

$\tan\bigcirc \tan\square = 1$

$\cos(\bigcirc + \square) = 0$

۲) $\tan\bigcirc = -\cot\square$

یا

$\tan\bigcirc \tan\square = -1$

$\cos(\bigcirc - \square) = 0$

تک‌بُعد = تک‌بُعد

به کمک روابط مثلثاتی:

ایجاد عامل مشترک و فاکتور

ازبین بردن عدد ثابت و ایجاد صفر

+ پیدی نشد

چندتا

تک‌عدد = تک‌بُعد

* اگر جلوی نسبت مثلثاتی به جای θ، $k\theta$ بود

تاثیر در تعداد دورها و تعداد جوابها

تاثیر در عدد جوابها

تک‌عدد = تک‌بُعد

بنود

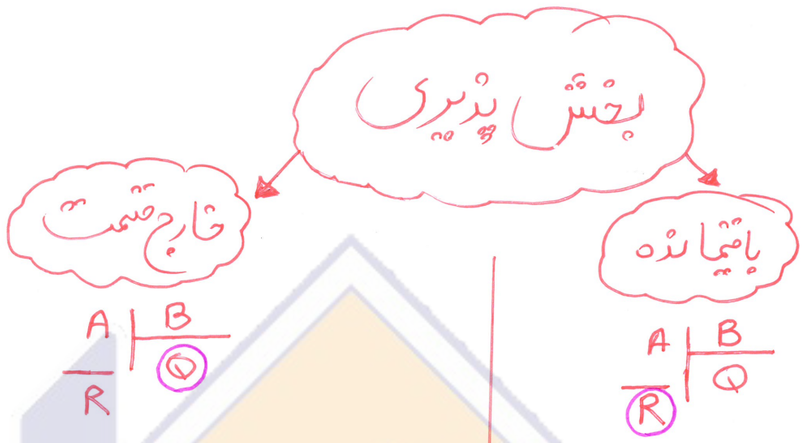
زوایای متفاوت

پیداکردن ارتباط زیبا بین زوایا (مجموع، مکمل) و یکسان‌سازی زوایا

تبدیل به دو حالت قبلی

تحصیل باما

$$A = B \times Q(x) + R(x)$$



خقفیه تقسیم :

① B درجه ۱ باشد: ریشهٔ B در A

② B درجه ۱ نباشد: عوامل درجه ۱ آن را بیرون می‌کشیم:

- بر B بخش پذیر ← برعامل هم بخش پذیر
- بر B دارای باقیمانده R ← از آنچه مانده (R) برعامل باقیمانده بگیر

خقفه‌ریاضی

- برعامل دارای باقیمانده R ← باقیمانده بر B ، گزینه‌ای که در صورت تست نیست

خقفه‌ریاضی

تحصیل باما

حد $\lim_{x\to} \frac{f}{g}$

حد ۰/۰

(توکل در بن گناه فراموش نشه)

(H) :

* تعیین تکلیف قدرمطلق و براکت

---

* وقتی جواب داده می‌شود:

$g=0 \leftarrow f=0$

$f=0 \leftarrow g=0$

(توکل در بن گناه فراموش نشه)

: مثلثاتی ۰/۰

* تعیین تکلیف قدرمطلق و براکت

۱) هم‌ارزی :

$0\to 0$:
- $\sin\square \sim \square \sim \tan\square$
- $\cos^n\square \sim 1-n\frac{\square^2}{2}$

۲) (H)

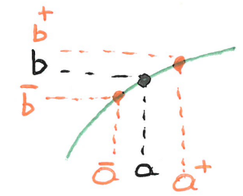
۳) $\sqrt{\text{صفر}} \to$

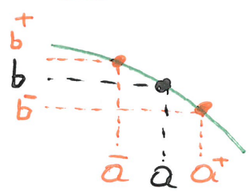
تلاش برای ازبین بردن رادیکال (معمولاً مزدوج)

و بس (H)

---

* تعیین تکلیف در توابع سه‌ضابطه : رسم نمودار و توجه به همسودی انتزولی





حد ∞

: هم‌ارزی بدتوان

(خطا ← فقط شیب مهم)

---

* وقتی جواب داده می‌شود:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty \to \text{درجه صورت بیشتره} \\ 0 \to \text{درجه مخرج بیشتره} \\ \text{عدد} \to \text{درجه صورت و مخرج مساویه} \end{cases}$$

حد ۰

عدد / ۰ ↓

تعیین تکلیف 0^+ یا 0^-

* وقتی:

عدد صورت = ۰ ← صفر واقعی

۰ مخرج = ۰ ← تعریف‌شده واقعی

---

* وقتی جواب داده می‌شود:

پارامترهای صورت ← از کلاس ۰

پارامترهای مخرج ← صفرشدن مخرج

↓

اگر جواب یکی به صورت او طرفین بی‌نهایت شود

↓

ریشه مخرج : مضاعف

تحصیل باما



چ م ر :

$\begin{cases} \text{——} & x \leq a \\ \text{——} & x > a \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \text{——} & x < a \\ \text{——} & x = a \\ \text{——} & x > a \end{cases}$

$\begin{cases} \text{——} & |x| < a \\ \text{——} & |x| \geq a \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \text{——} & x \neq a \\ \text{——} & x = a \end{cases}$

محدودیت دامنه : جاهایی که عضو دامنه نیستند : حتماً

چند ضابطه : لب مرز : شاید

براکتی : جاهایی که داخل براکت را بیجع : مگر ریشه پشت براکت

* پیوستگی در سر و ته بازه بسته، جداگانه بررسی شود.

---

* اگه بگه پیوستگی را در یک بازه بررسی کنید:

مرز داخل بازه ← پیوستگی کامل در مرز بررسی شود

مرز، سر و ته بازه ← پیوستگی به طرف در مرز بررسی شود: سر: م ر / ته: چ م

فقط ریاضی:

یک بار بررسی در به عدد زوج دلخواه → $\begin{cases} \text{——} & x \text{ زوج} \\ \text{——} & x \text{ فرد} \end{cases}$

یک بار بررسی در به عدد فرد دلخواه

فقط ریاضی: از بین بررسی کامل یا نابیوسته ساز (بالا = پایین) → $\begin{cases} \text{——} & \not\exists \\ \text{——} & \exists \end{cases}$

تحصیل باما

مجانب

مجانب افقی

$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

جواب حد در ∞

هم ارزی پرتوان

$y = b$

مجانب قائم

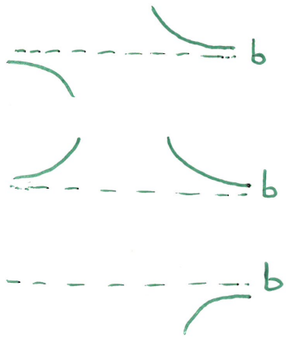
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

محل حد ∞

ریشه مخرج، بشرطی که ریشه صورت نباشد

$x = a$

مدل قرارگیری صفتی تابع در کنار مجانب افقی:



به تابع، $0^{\pm}$ می‌دهیم

تا ببینیم مقدارش b^{-} یا b^{+} می‌شود

مدل قرارگیری صفتی تابع در کنار مجانب قائم:

در $x = a$، حد راست و چپ جداگانه بگیریم

تا ببینیم مقدارش $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود



حل تلاقی مجانب‌ها

$w\,(\text{مجانب افقی } b \text{ و مجانب قائم } x)$

تحصیل باما

مشتق گیری

ترکیب توابع:

$$*\ \big(fog(x)\big)' = g'(x) \times f'\big(g(x)\big)$$

حالا ← ضرب

مشتق توش ← مشتق رو بدار روش

توجه به: حالا برعکس!

$$*\ \Big(f\big(\text{یه چیزی برحسب } x\big)\Big)' = \big(\text{یه چیزی برحسب } x\big)'\ f'\big(\text{یه چیزی برحسب } x\big)$$

عادی:

بقیه را یکا لها: توان

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{-1}{x^2}$$

$$\sqrt{x} \rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \rightsquigarrow \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\tan x \rightsquigarrow 1+\tan^2 x$$

$$\cot x \rightsquigarrow -(1+\cot^2 x)$$

* $\times$ و $\div$ ← عامل صفر شونده + خودش رو بدار

* تو در تو ← شروع از بیرون ترین با اولویت توان

پشت خط خورده / جلو چینده !

اعمال بر روی توابع:

$$*\ f'g + g'f = (f \times g)' \longrightarrow f''g + g'f' = ?$$

$$*\ \frac{f'g - g'f}{g^2} = \left(\frac{f}{g}\right)' \longrightarrow f'g - g'f = ?$$

ادبیات مال معادل مشتق گیری

تعریف مشتق :

① خوب :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad \begin{matrix} x\to a^+ \to f'_+(a) \\ x\to a^- \to f'_-(a) \end{matrix}$$

② بد :

(?) (?)′

? → ممون نقطه ثابتی که در صورت کسر زیادی بینی

تفاضل پرانتزهای صورت / مخرج

ممون تابعی که زیادی بینی

* برای شتشیف چپ و راست ، کافی است در صورت کسر حدی بزنیم .

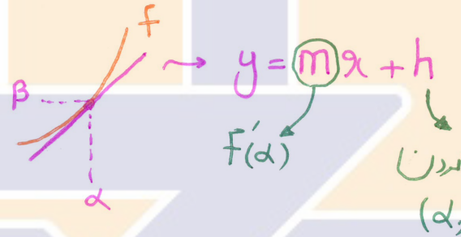
③ زشت : فکرکن خدا! ← H

شیب خط واصل و مماس

بین دو نقطه : آهنگ متوسط = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

در یک نقطه : آهنگ لحظه‌ای = f'

معادله :



برعکس ۱ : تابع رو بدون !

مثال : $y=3x-7$ مماس بر منحنی f در نقطه‌ٔ $x=2$ است :

$$\begin{cases} f'(2)=3 \\ f(2)=-1 \end{cases}$$

برعکس ۲ : نقطه رو بدون !

مثال : خط مماس بر منحنی $f=0$ در نقطه‌ٔ $x=\alpha$

دارای شیب ۵ است :

$f'=5 \rightarrow$ بدست میاد α

* خطوط موازی ، شیب‌های برابر دارند .
* خطوط محور ، شعاعی ، عکس و قرینه دارند .

آهنگ متوسط و لحظه‌ای

دربازه‌های خیلی کوچک

سرعت

شیب خط واصل : بین دو نقطه = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

شیب خط مماس : در یک نقطه = f'

* در توابع درجه دو :

متوسط در یک بازه = لحظه‌ای در وسط بازه

دو منحنی مماس بر هم : (دارای مماس مشترک)

در $x=\alpha$

① اگر α رو داری :

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

② اگر α رو نداری : باید معادله‌ٔ $f=g$ ریشه مضاعف بده

تحصیل باما

مشتق پذیری

مشتق پذیری ⟸ مشتق ناپذیری

مشتق پذیری ⟸ [چ م ر / م چ م ر]

مشتق ناپذیری ⟸

① ناپیوسته ها :
- محدودیت راسته : جاهایی که عضو را نمی‌نشند ؛ حتماً — البته بجز این نیستند!
- چندضابطه : لب مرز ؛ شاید
- براکتی : جاهایی که داخل براکت معیار : مگر ریشه مکرر پشت براکت

ریشه ساده پشت براکت : پیوسته و مشتق ناپذیر ← گوشه

② گوشه ها :
- چندضابطه : لب مرز ؛ شاید
- قدر مطلق : ریشه‌های ساده داخل قدر : مگر ریشه ~~مکرر~~ پشت قدر

③ خط قائم :
- رادیکالی : ریشه‌های زیر رادیکال که توان از فرجه کمتر است

فرد / زوج

بازگشت

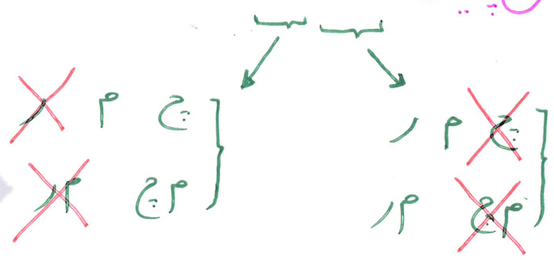
مماس او عمودم ⟸ مشتق پذیر
خطا!

خط می‌تواند باشد

* کاربرد نقاط مشتق ناپذیر در : تعیین دامنهٔ مشتق / ضابطه مشتق / نمودار مشتق (+ یکنوایی)

[چ م ر / م چ م ر] → مشتق مرتبه ۲ موجود باشد
- م چ م ر : f'
- م چ م ر : f''

* مشتق پذیری در سر ریشه بازهٔ بسته ← مشابه ← پیوستگی



تحصیل نما

کسری

کاربرد مشتق (I)

غیرکسری

$$\frac{f}{g}=\frac{f'}{g'}$$

* مواظب ریشه‌هایی که هم‌زمان ریشهٔ صورت و ریشهٔ مخرج هستند، باش!

صعودونزول یا $f'=0$

بی‌تابی!

به جز نابیوسته به دلیل کدوم بین داشه

* سرعت بازه در صورت بسته بودن، بحرانی است

بحرانی

بحرانی

ریشه‌های یک‌برزوج

ریشه‌های یک‌برزوج

بشی ext

بشی ext

→ (a,b) : $\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$ بشی ext

جدول کاهشی افزایشی خودِ f

جدول تعیین علامت f'

جاگذاری همراه با سرعت در خودِ f

یکنوایی

+

جنس ext

یکنوایی

+

جنس ext

→ اکیداً صعودی $f'>0$

→ اکیداً نزولی $f'<0$

→ از اکید خارج می‌شود $f'=0$

ریشه‌های مضرج تأثیرگذار

↓

ext مطلق

ext مطلق

ریشه یک‌برزوج مضرج:

به جدول تعیین یکنوایی می‌رود، اما یکنوایی در آن عوض می‌شود

کلاً ext مطلق نداریم

ریشه یک‌برزوج مضرج:

به جدول تعیین یکنوایی می‌رود و یکنوایی در آن عوض می‌شود

فقط آن ext مطلق را داریم که ext نسبی اش را داریم.

تحصیل بابا

بهینه سازی

- بدون نکته :
- با نکته :

۱) $\begin{cases} \bigcirc + \square = A \\ \bigcirc \times \square : max \end{cases}$

مثال: $2x^2 + y^3 = 16 \longrightarrow x^4 y^4 : max$

مثال: $x + 4y = 15 \longrightarrow x^3 y^2 : max$

مثال: $x^2 + 2y = 6 \longrightarrow xy : max$

---

۲) $\begin{cases} \bigcirc \times \square = A \\ \bigcirc + \square : min \end{cases}$

مثال: $xy = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 : min$

۱- شناسایی تابع هدف

۲- اگر تابع هدف، ۲ متغیره بود:

شناسایی تابع قید
و تک متغیره کردن تابع هدف به کمک تابع قید

۳- پیدا کردن نقاط بحران

حالات خاص:

۱) $\sqrt{\bigcirc}$: Max (Min) $\longrightarrow$ $\bigcirc$: Max (Min)

۲) درجه دو : Max (Min) $\longrightarrow$ راس سهمی

تحصیل باما

فقط ریاضی — کاربرد مشتق (II)

بی‌نام!

موجودنیت $f''=0$ یا

(ریشه‌های غیرمکرر و فرد)

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f''(a)=0 \end{cases} : (a,b) \rightarrow \text{عطف}$$

عطف ← به شرط پیوستگی + امکان رسم مماس واحد

نقطه‌ای که مماس بر منحنی، در آن از روی منحنی می‌گذرد.

(جدول تعیین علامت f'')

تقعر →
$f''>0 \rightarrow \cup$
$f''<0 \rightarrow \cap$

---

* حالت خاص: تابع درجه ۳ $y=ax^3+bx^2+cx+d$

$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$

تحصیل بانما